

УДК: 531.39 MSC 70Q05
OECD: 02.03.00

Модальные алгоритмы подавления упругих вибраций: ограничения и перспективы

Полянский В.А.¹, Смирнова Н.А.^{2*}

¹ Д.т.н., профессор, директор Института проблем машиноведения РАН

² К.т.н., доцент Высшей школы механики и процессов управления, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
^{1,2} г. Санкт-Петербург, РФ

Аннотация

Исследуется система активной виброзащиты упругого объекта с распределенными параметрами. Система построена по принципу обратной связи и реализована с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Используется модальный алгоритм управления, позволяющий независимо подавлять колебания по низшим модам упругого объекта. Показано, что наличие неконтролируемых мод в измерениях сенсоров обратных связей не позволяет поднять коэффициент усиления разомкнутой системы. Поэтому эффективность модальных алгоритмов подавления вибраций ограничена наличием и возбуждением высших мод упругого объекта. Предложена модификация модального алгоритма с использованием избыточного числа сенсоров и актуаторов при сохранении числа обратных связей. Приведены результаты численного моделирования, показывающие, что при избыточном числе сенсоров и актуаторов в алгоритме управления могут быть использованы простые оценки форм упругих колебаний объекта.

Ключевые слова: модель с сосредоточенными параметрами, модель с распределёнными параметрами, обратная связь, модальное управление, проход через резонанс.

Modal control for damping of elastic vibrations: bound and perspective

Polyanskiy V.A.¹, Smirnova N.A.^{2}*

¹ *DSc, professor, director of Institute for Problems of Mechanical Engineering, RAS*

² *PhD, assistant professor of Higher School of Mechanics and Control, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
^{1,2} St. Petersburg, Russia*

Abstract

In this paper the results of an investigation of active vibration protection system of an elastic distributed object are presented. The system is constructed according to the principles of feedback control with the use of piezoelectric sensors and actuators. Modal control algorithm is capable of individual lowest mode damping. The existence of non-controllable upper modes in the sensor signals sets a limit on vibration protection efficiency. Excitement of non-controllable modes makes it impossible to increase the feedback coefficients. The study tests control operability in relation to the changing number of sensor/actuator pairs while the feedback loops remain the same. A modification of modal algorithm in case the sensor/actuator overcharge is suggested. The numerical results made sure simple estimate of natural modes were suitable for control algorithm design.

Keywords: *lumped parameter model, elastic distributed model, feedback, modal control, lateral resonance.*

*E-mail: nina-mpu@mail.ru (Смирнова Н.А.)

Введение

Гашение упругих колебаний облегченных механических конструкций с помощью пьезоэлементов осуществляется во многих технических приложениях, таких как самолетостроение и автомобилестроение, робототехника [1, 2] и т.д. Основной особенностью объекта управления в этом случае является распределенность его инерционных и упругих характеристик, приводящая к бесконечному спектру собственных частот. Методы управления состоянием таких объектов основаны на редукции их модели в предположении о существенном возрастании демпфирования с увеличением номера формы упругих колебаний. Использование пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов позволяет пренебречь изменениями низших частот и форм механической конструкции, обусловленными приклеиванием пьезоэлементов [3, 4]. В связи с этим большую популярность приобрел метод «модального» управления, суть которого состоит в независимом демпфировании колебаний по формам упругого объекта [5, 6, 7]. Количество подлежащих активному демпфированию форм (следовательно, количество пар пьезоэлементов) зависит от диапазона возможных частот вынуждающего воздействия, в который обычно попадает несколько низших собственных частот объекта. Однако при реализации метода не удаётся добиться полной независимости управляемых форм колебаний от неуправляемых, поэтому наблюдается возбуждение высших форм упругих колебаний объекта [1, 6]. Чтобы снизить проявление этого эффекта необходимо располагать сенсоры и актуаторы оптимальным способом, причем критериями оптимальности служат показатели наблюдаемости или управляемости редуцированной модели [3, 8], квадратичный показатель затрат и качества подавления [9], энергетический показатель присутствия различных форм в колебательном движении [6]. Эффективность как активного, так и пассивного гашения вибраций зависит также от размеров и формы пьезоэлементов [3, 10, 11]. Определение локации и размеров пьезоэлементов требует расчетов на основе модели объекта управления, поэтому обратной стороной является чувствительность результатов к неточностям моделирования. Простейшие рекомендации по расстановке сенсоров и актуаторов сводятся к расположению их в зонах наибольших деформаций. В настоящей работе показано, что использование дополнительных сенсоров и актуаторов (когда количество пар пьезоэлементов превышает количество подлежащих активному демпфированию форм) позволяет располагать пьезоэлементы не требующим предварительных расчетов способом. Если количество сенсоров мало, то оценки активно демпфируемых форм должны быть выделены из измерений сенсоров с помощью фильтров высокого порядка [13, 14]. При использовании дополнительных сенсоров и актуаторов длина вектора, аппроксимирующего форму колебаний, увеличивается. За счет этого оценивание формы происходит точнее, и интенсивность возбуждения неконтролируемых форм колебаний снижается. Положительный эффект от введения дополнительных сенсоров и актуаторов отмечался при решении задачи полуактивного гашения колебаний при двухчастотном возбуждении [12]. Экспериментальные результаты показали эффективность модального управления при дополнительном сенсоре и актуаторе на звене манипулятора [2].

1. Подавление вибрации упругого объекта с сосредоточенными параметрами

Эффект возбуждения неконтролируемой моды упругого объекта при модальном управлении легко продемонстрировать, если принять модель объекта с сосредоточенными параметрами. Расчетная схема для получения такой модели, учитывающей три низшие собственные частоты, показана на рис. 1.

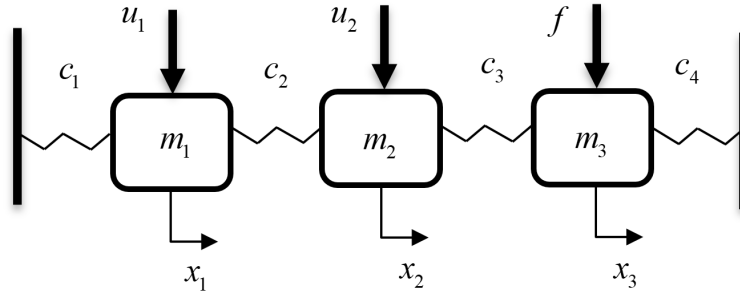


Рис. 1. Расчетная схема объекта с сосредоточенными параметрами

На схеме указаны массы материальных точек, коэффициенты упругости пружин. Рассматривается движение вдоль горизонтальной оси (без учета силы тяжести) под воздействием возбуждающей гармонической силы f , приложенной к третьей точке. Задача заключается в уменьшении амплитуды вынужденных колебаний первых двух материальных точек за счет управляющих воздействий $u = [u_1 \ u_2]^T$, оказываемых на них. Предполагается, что измерению доступны скорости отклонения первой и второй материальных точек от положения их статического равновесия. Система управления представляет собой обратные связи по доступным измерениям.

Математическая модель трехмассовой системы имеет вид:

$$M\ddot{x} + Cx = F, \quad (1)$$

где $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ – вектор перемещений; $M = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ – инерционная матрица; $C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix}$ – матрица упругости; $F = [u_1 \ u_2 \ f]^T$ – вектор правых частей, включающий в себя управляющие и возмущающее воздействия.

Введем в рассмотрение матрицу форм упругого объекта Θ , такую что $\Theta^T M \Theta = E$ – единичная матрица, $\Theta^T C \Theta = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ – матрица квадратов собственных частот упругого объекта. Замена переменных $x = \Theta \beta$ позволяет получить уравнение для вектора мод упругого объекта $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T$ в виде:

$$\ddot{\beta} + \Lambda \beta = \Theta^T F = \Theta^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \Theta^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Пусть диапазон возможных частот гармонической возбуждающей силы f включает в себя две низшие собственные частоты объекта. Цель управления заключается в снижении резонансных амплитуд двух низших мод β_1 и β_2 за счет управляющих сигналов. Для независимого демпфирования низших мод используется алгоритм:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -(\bar{\Theta}^T)^{-1} K \bar{\Theta}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \vartheta_{11} & \vartheta_{12} \\ \vartheta_{21} & \vartheta_{22} \end{bmatrix}$, ϑ_{ij} – компоненты матрицы Θ (значение j формы колебаний i -ой точки); $K = \text{diag}(k_1, k_2)$ – матрица коэффициентов усиления обратных связей.

Уравнения (2), (3) и соотношение $\dot{x} = \Theta \dot{\beta}$ совместно дают уравнение замкнутой

системы в виде:

$$\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + \Lambda\beta = \Theta^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $D = \begin{bmatrix} K & S \\ S^T & g \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов демпфирования;

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = K\bar{\Theta}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta_{13} \\ \vartheta_{23} \end{bmatrix}, g = [\vartheta_{13} \ \vartheta_{23}](\bar{\Theta}^T)^{-1}K\bar{\Theta}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta_{13} \\ \vartheta_{23} \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффициентов демпфирования D является диагональной, если в модели объекта учтены только управляемые моды, соответствующие колебаниям с собственными частотами, попадающими в диапазон частот возбуждения. Тогда демпфирование колебаний по каждой моде осуществляется независимо. При учете в модели объекта неуправляемой моды наблюдается эффект самовозбуждения этой моды. Уравнение замкнутой системы запишем в виде системы скалярных уравнений:

$$\ddot{\beta}_1 + k_1\dot{\beta}_1 + \lambda_1^2\beta_1 = \vartheta_{31}f - s_1\dot{\beta}_3$$

$$\ddot{\beta}_2 + k_2\dot{\beta}_2 + \lambda_2^2\beta_2 = \vartheta_{32}f - s_2\dot{\beta}_3$$

$$\ddot{\beta}_3 + g\dot{\beta}_3 + \lambda_3^2\beta_3 = \vartheta_{33}f - s_1\dot{\beta}_1 - s_2\dot{\beta}_2$$

Видно, что на эволюцию первых двух мод оказывает влияние третья неуправляемая мода. Это происходит потому что в измерениях содержится информация о всех модах упругого объекта. Увеличение коэффициентов обратной связи приводит к увеличению демпфирования как управляемых мод, так и неуправляемой моды. Пропорционально коэффициентам обратной связи увеличиваются вынуждающие силы в правой части уравнения для неуправляемой моды β_3 . В результате влияние третьей моды на размах колебаний первой и второй мод может стать существенным. Поэтому возможности управления с обратными связями (3) ограничены, а эффективность подавления вибрации зависит от баланса между демпфированием низших мод и интенсивностью вынужденных колебаний неуправляемой моды.

Проиллюстрируем этот эффект результатами численного моделирования. Примем $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ кг, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ Н/м, тогда низшая собственная частота $\lambda_1 = 0,6$ рад/с, а в матрице:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,707 & 0,5 \\ 0,707 & 0 & -0,707 \\ 0,5 & 0,707 & 0,5 \end{bmatrix}$$

столбцы означают формы упругих колебаний. Пусть $f = \cos \lambda_1 t$. В алгоритме управления (3) матрица $\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,707 \\ 0,707 & 0 \end{bmatrix}$, диагональная матрица K подлежит выбору. На рис. 2 показаны осциллограммы компонент вектора перемещений x в замкнутой системе при различных значениях коэффициентов усиления обратных связей K .

При увеличении коэффициента k_1 размах упругих колебаний первой и второй материальных точек сначала уменьшается, но затем начинает увеличиваться. При этом колебания точек вместо синфазных (характерных для первой формы) становятся противофазными (характерными для третьей формы), что показано на рис. 2 справа. Таким образом, эффективность управления (3) ограничена тем обстоятельством, что в измерениях содержится информация о колебаниях по неуправляемой моде.

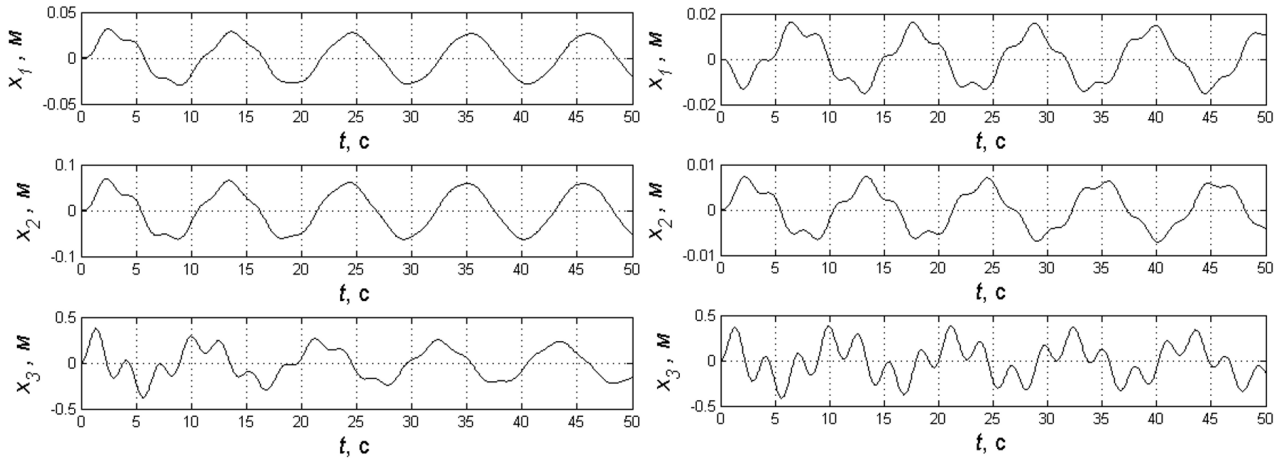


Рис. 2. Осциллограммы компонент вектора перемещений в замкнутой системе: слева – при $k_1 = 10c^{-1}$; $k_2 = 10c^{-1}$; справа – при $k_1 = 100c^{-1}$; $k_2 = 10c^{-1}$

2. Подавление вибрации упругого объекта с распределенными параметрами

В качестве модельного объекта с распределенными параметрами выбрана консольная балка Бернулли-Эйлера под воздействием внешнего изгибающего момента. Возмущающее воздействие таково, что рассматривается медленный проход через резонансы, наблюдаемые в окрестностях низших собственных частот балки. Система подавления вибрации балки должна быть эффективна на нескольких резонансах. Виброзащита строится по принципу обратной связи и включает в себя пары пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов, наклеенные в r сечениях балки.

Математическая модель балки постоянного сечения имеет вид:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \ddot{u} &= 0 \\
 Q - \frac{\partial M}{\partial x} &= \mu_0 + \sum_{i=1}^r \mu_i \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi &= 0 \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{EI} M &= 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

где u – поперечное перемещение (прогиб) балки; φ – угол поворота касательной к средней линии балки; Q – поперечная сила; M – изгибающий момент; x – продольная координата, отсчитываемая от заделанного конца балки; ρ – масса единицы длины балки; I – момент инерции поперечного сечения; E – модуль Юнга материала балки; μ_0 – распределенный возбуждающий момент; μ_i – распределенные управляющие моменты.

Определим собственные формы прогиба $w_k(x)$ консоли длины l , удовлетворяющие граничным условиям $u_{x=0} = 0$, $u'_{x=0} = 0$, $u''_{x=l} = 0$, $u'''_{x=l} = 0$ и условиям ортогональности, и собственные формы угла поворота сечения $\vartheta_k(x) = \frac{-dw_k(x)}{dx}$. Разложим перемещение $u(x,t)$ и угол $\varphi(x,t)$ в ряд по собственным формам колебаний консоли:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) \beta_k(t), \quad \varphi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k(x) \beta_k(t), \tag{6}$$

где $\beta_k(t)$ – моды упругого объекта.

Каждая мода $\beta_k(t)$ является решением уравнения вынужденных колебаний:

$$\ddot{\beta}_k(t) + \lambda_k^2 \beta_k(t) = f_k + y_k$$

$$f_k = \int_0^l \mu_0 \vartheta_k(x) dx, \quad y_k = \int_0^l \vartheta_k(x) \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \right) dx, \quad (7)$$

где λ_k – k -ая собственная частота упругой балки, определяемая из частотного уравнения для свободных колебаний.

Предполагается, что актуатор создаёт сосредоточенный изгибающий момент, а сенсор измеряет угол поворота сечения балки в месте прикрепления пары x_i [1]. Поскольку возбуждающий момент $M_0(t)$, приложенный в сечении с координатой x_0 , также является сосредоточенным, то можно записать:

$$\mu_0 = M_0(t) \delta(x - x_0), \quad \mu_i = M_i \delta(x - x_i).$$

Следовательно, слагаемые в правой части уравнения (7) вычисляются по формулам:

$$f_k = M_0(t) \vartheta_k(x_0), \quad y_k = \sum_{i=1}^r M_i \vartheta_k(x_i),$$

где $M_0(t) = \sin(\frac{1}{2}at^2)$; a – параметр, определяющий скорость прохождения резонансов.

С учетом выражений (6) и (7) цель управления заключается в снижении резонансных амплитуд низших m мод $\beta_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$ за счет выбора управляющих сигналов M_i , приложенных в сечениях с координатами x_i , $i = 1, \dots, r$. Объединяя $r \geq m$ управляющих сигналов M_i в вектор U , запишем алгоритм управления:

$$U = -FKT \frac{d}{dt} \Phi, \quad (8)$$

где $\Phi_{r \times 1}$ – вектор, объединяющий сигналы сенсоров; $K_{m \times m}$ – диагональная матрица коэффициентов усиления; $F_{r \times m}$, $T_{m \times r}$ – модальные матрицы, подлежащие выбору (здесь и далее нижний индекс показывает размер матричного объекта).

Для независимого друг от друга демпфирования первых m мод модальные матрицы выберем следующим образом:

$$T_{m \times r} = (\theta_{m \times r}^T \theta_{r \times m})^{-1} \theta_{m \times r}^T, \quad F_{r \times m} = T_{r \times m}^T = \theta_{r \times m} (\theta_{m \times r}^T \theta_{r \times m})^{-1}, \quad (9)$$

где $\theta_{r \times m}$ – матрица форм упругого объекта.

Строка матрицы $\theta_{r \times m}$ состоит из значений ϑ_k , $k = 1, 2, \dots, m$, в месте закрепления пары сенсор – актуатор, а количество строк определяется количеством r пар. Для определения модальных матриц требуется идентификационная процедура [15].

В конечномерной модели замкнутой системы учтем n собственных форм, среди которых только по m модам организуются обратные связи:

$$\ddot{\beta}_{n \times 1} + \Lambda_{n \times n} \beta_{n \times 1} = f_{n \times 1} - D_{n \times n} \dot{\beta}_{n \times 1}, \quad D_{n \times n} = \Theta_{n \times r}^T F_{r \times m} K_{m \times m} T_{m \times r} \Theta_{r \times n}, \quad (10)$$

где $n > m$ – количество слагаемых, учитываемых в разложении (6); строка матрицы $\Theta_{r \times n}$ состоит из значений $\vartheta_k, k = 1, 2, \dots, n$, а количество строк определяется количеством r пар сенсор – актуатор; $D_{n \times n}$ – матрица, определяющая демпфирование колебаний в замкнутой системе.

Достаточное условие устойчивости заключается в требовании симметричности и положительной определенности матрицы демпфирования D [1, 4]. Симметричность достигается парной расстановкой сенсоров и актуаторов. Представим матрицу $\Theta_{r \times n}$ в блочном виде $\Theta_{r \times n} = [\theta_{r \times m} \theta_{r \times (n-m)}]$, где строки блока $\theta_{r \times (n-m)}$ сформированы из значений $\vartheta_k, k = m + 1, m + 2, \dots, n$ в месте закрепления пары сенсор-актуатор. Тогда получим структуру матрицы демпфирования D аналогичную (4):

$$D_{n \times n} = \begin{bmatrix} K_{m \times m} & S_{m \times (n-m)} \\ S_{(n-m) \times m}^T & G_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где введены следующие обозначения: $S = K\Psi$, $G = \Psi^T K \Psi$, $\Psi_{m \times (n-m)} = T_{m \times r} \Theta_{r \times (n-m)}$.

Положительный эффект обратных связей заключается в независимом демпфировании управляемых мод за счет диагональной структуры матрицы K и дополнительном демпфировании неуправляемых мод за счет диагональных элементов матрицы G . Отрицательный эффект заключается в возбуждении вынужденных колебаний неуправляемых мод не только приложением внешнего возбуждения f , но и приложением нагрузки с низкими частотами и амплитудами, зависящими от значений элементов матрицы S . Поскольку амплитуда нагрузки пропорциональна коэффициентам усиления обратных связей, то эффективность виброзащиты ограничена.

В численном эксперименте инерционные и упругие параметры консоли длиной $l = 1,47$ м выбраны так, что нижние собственные частоты составляют $\lambda_1 = 7,1$ рад/с и $\lambda_2 = 44,7$ рад/с. Учитывается вязкое демпфирование, пропорциональное собственной частоте с одинаковым безразмерным коэффициентом демпфирования $\xi = 0,01$. Координата приложения возбуждающего момента $x_0 = 0,2$ м не совпадает с узлами второй и третьей форм угла. Продолжительность воздействия возбуждающего момента $M_0(t) = 1 \sin(\frac{1}{2}at^2)$ и значение параметра $a = 0,05$ рад/с² таковы, что осуществляется не слишком быстрый проход через два резонанса. В численной модели учитываются десять членов разложения (6). В алгоритме управления моделируется реальное дифференцирование измеряемых сигналов с помощью апериодического звена первого порядка с постоянной времени $\tau = 0,01$ с. Эффективность виброзащиты оценивается по прогибу свободного конца консоли $u(l,t)$.

На рис. 3 показаны осциллограммы перемещения $u(l,t)$ и первых четырех мод в разомкнутой системе. Увеличение размаха колебаний происходит при совпадении скорости изменения фазы возбуждающего момента $\omega = at$ со значениями собственных частот упругого объекта.

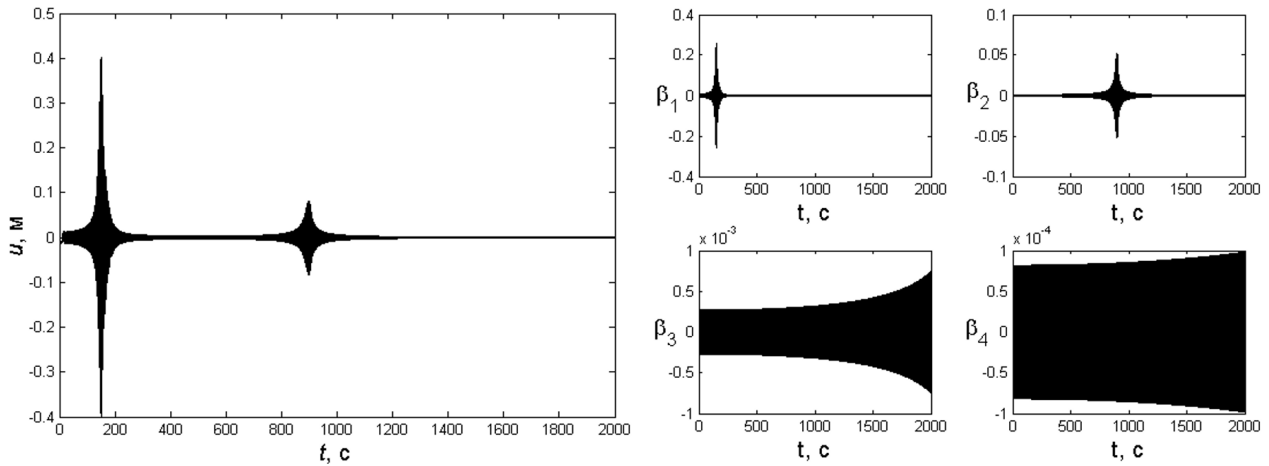


Рис. 3. Осциллограммы прохода через резонанс в разомкнутой системе

Замкнутая система с двумя обратными связями построена с помощью двух пар сенсор – актуатор, расположенных в сечениях $x_1 = 0,4$ м и $x_2 = 1,3$ м, где первые две формы угла имеют почти максимальные значения. Значения коэффициентов обратных связей выбирались независимо: k_1 – так, чтобы снизить размах колебаний на первом резонансе, k_2 – так, чтобы снизить размах колебаний на втором резонансе. При слишком сильной обратной связи эффективность виброзащиты снижается. На рис. 4 приведены осциллограммы процессов в замкнутой системе с коэффициентами усиления $k_1 = 100 \text{ с}^{-1}$; $k_2 = 100 \text{ с}^{-1}$.

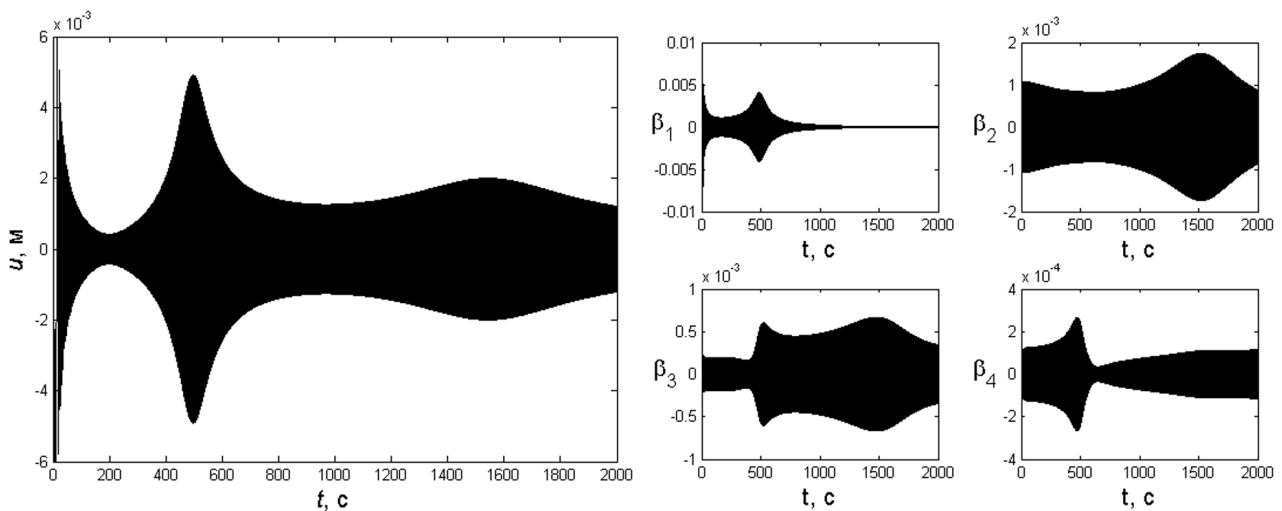


Рис. 4. Осциллограммы процессов в замкнутой системе с двумя обратными связями и двумя парами сенсор – актуатор

При замыкании обратной связью на осциллограммах третьей и четвертой мод появились всплески в те же моменты времени, что и на осциллограмме первой моды. Это вынужденные колебания неконтролируемых мод, обусловленные замыканием обратных связей.

Для того чтобы демпфировать колебания третьей моды, необходимы третья пара сенсор – актуатор, идентификация третьей формы в сечениях закрепления пар и организация третьей обратной связи. Более перспективным представляется увеличение количества пар сенсор – актуатор при сохранении числа обратных связей. При этом

в матрице демпфирования (11) внедиагональные элементы d_{13} и d_{23} уменьшаются по отношению к диагональным d_{11} и d_{22} соответственно [16]. Например, отношение $\alpha = |d_{13}/d_{11}|$ в зависимости от количества r пар сенсор – актуатор уменьшается как показано на рис. 5.

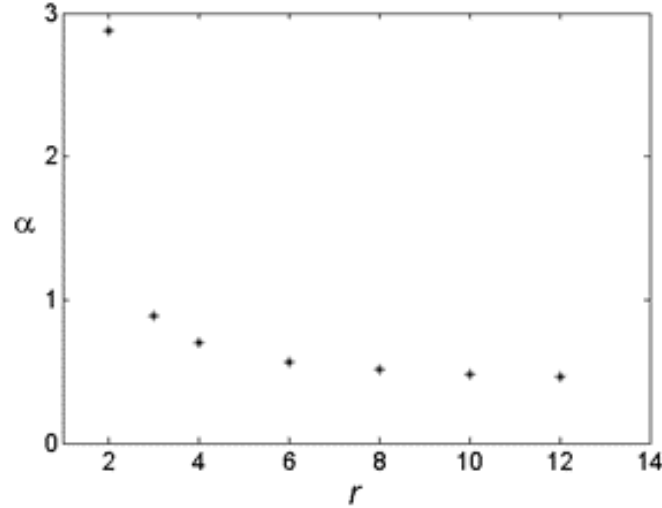


Рис. 5. Зависимость отношения α от количества пар сенсор – актуатор

Результаты численного моделирования процессов в замкнутой системе с двумя обратными связями ($k_1 = 100 \text{ с}^{-1}$; $k_2 = 100 \text{ с}^{-1}$) и четырьмя парами сенсор – актуатор показаны на рис. 6. Пары расположены вдоль балки так, чтобы координаты сечений $x_i, i = 1, \dots, 4$ делили балку на пять равных частей.

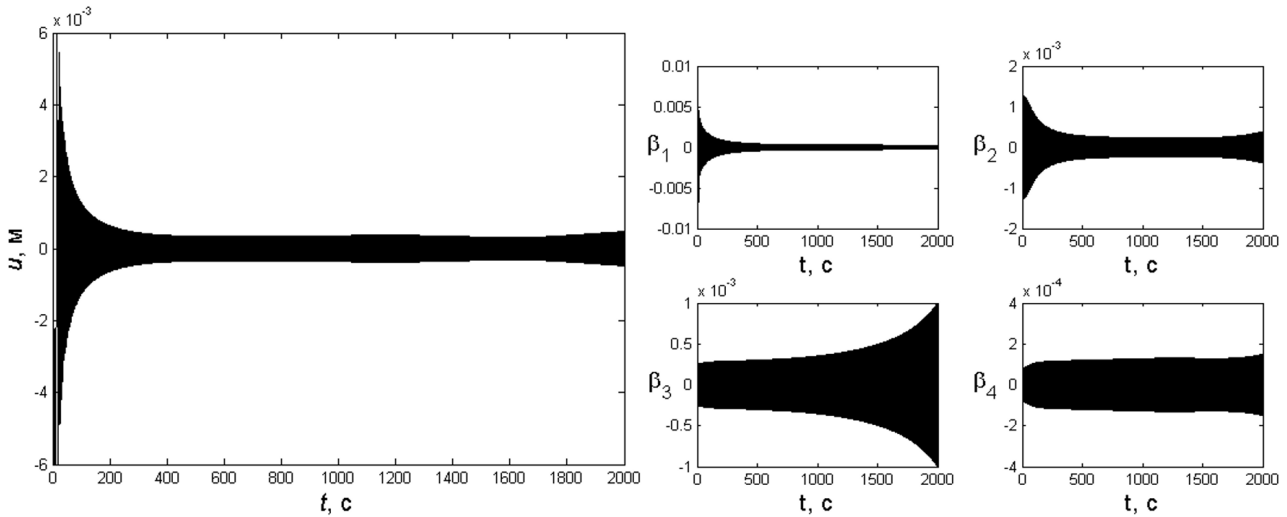


Рис. 6. Осциллограммы процессов в замкнутой системе с двумя обратными связями, четырьмя парами сенсор-актуатор и модальными матрицами (9)

Сравнение осциллограмм, представленных на рисунках 4 и 6, позволяет утверждать следующее. При преобразовании измеряемого сигнала (6) модальной матрицей T мы получаем оценки первой и второй мод, содержащие все высшие моды. Избыточное количество пар сенсор – актуатор помогает по крайней мере снизить вклад третьей моды в оценках первых двух. Поэтому возбуждение колебаний по третьей форме

на низших резонансах не столь интенсивно. При избыточном количестве пар сенсор – актуатор можно добиться более эффективного подавления вибрации.

Использование избыточного количества пар сенсор – актуатор приводит к необходимости идентификации упругих форм объекта в местах прикрепления дополнительных пар пьезоэлементов. Этот факт является существенным недостатком, поскольку процедура идентификации форм сложна. Результаты численного моделирования процессов в замкнутой системе с избыточным количеством пьезоэлементов показывают, что в алгоритме управления можно использовать модифицированные модальные матрицы:

$$T = (\text{sign}(\theta^T)\text{sign}(\theta))^{-1}\text{sign}(\theta^T), \quad F = T^T, \quad (12)$$

полученные подстановкой в формулу (9) вместо $\theta_{r \times m}$ матрицы $\text{sign}(\theta_{r \times m})$. При четном количестве пар пьезоэлементов и их симметричной расстановке относительно середины балки расчет модальных матриц можно осуществить по формуле:

$$T = \text{sign}(\theta^T), \quad F = \text{sign}(\theta) \quad (13)$$

Варианты (12) и (13) расчета модальных матриц дают при одинаковой матрице коэффициентов усиления обратных связей K матрицы демпфирования D , отличающиеся постоянным множителем. Однако, матрицы демпфирования вместо диагонального блока $K_{m \times m}$ (см. (11)) содержат блок с ненулевыми внедиагональными элементами. Следовательно, демпфирование первой и второй мод колебаний не может быть выполнено независимо. Это осложняет настройку коэффициентов усиления двух обратных связей. Путем последовательного приближения удаётся добиться приемлемого демпфирования колебаний на обоих резонансах. Результаты численного моделирования процессов в замкнутой системе с двумя обратными связями, четырьмя парами сенсор – актуатор и модальными матрицами (13) показаны на рис. 7.

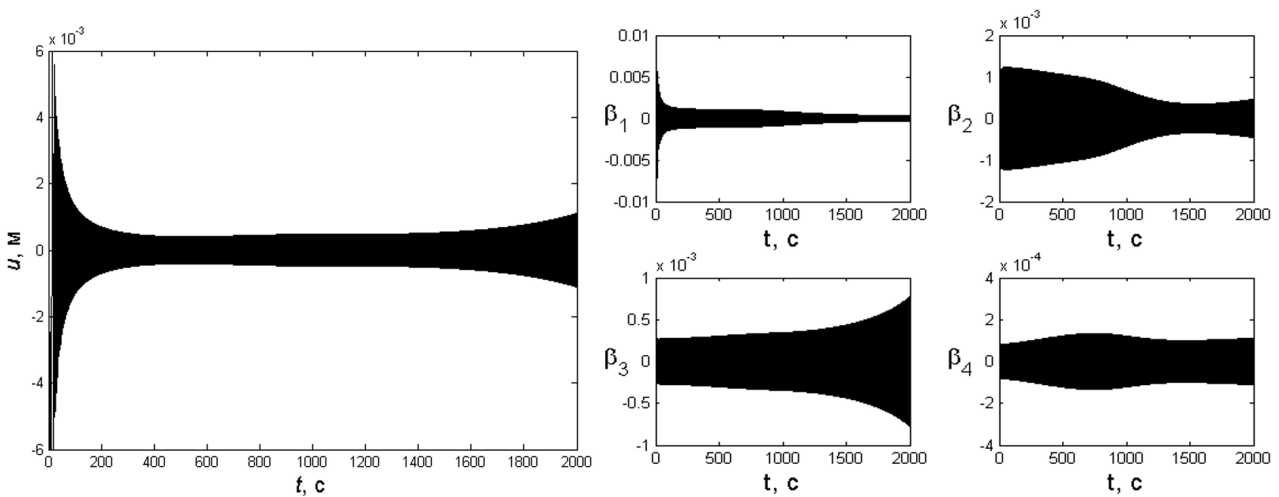


Рис. 7. Осциллограммы процессов в замкнутой системе с двумя обратными связями, четырьмя парами сенсор – актуатор и модальными матрицами (13)

Идентификационная процедура, позволяющая экспериментально определить модальные матрицы (12), предложена в [16]. Она сводится к анализу фигур Лиссажу, построенных по сигналам пар сенсоров в режиме прохода через резонансы.

Заключение

Ограничение эффективности виброзащиты, построенной по принципу независимого демпфирования низших мод упругого объекта, обусловлено возбуждением вынужденных колебаний по неконтролируемым высшим модам. Использование избыточного количества сенсоров и актуаторов позволяет существенно уменьшить размах этих колебаний и увеличить эффективность виброзащиты. Результаты численного моделирования показали, что для виброзащиты балки длиной $l = 1,47$ м в диапазоне частот, ограниченном второй собственной частотой, достаточно четырех – шести пар сенсор – актуатор.

Полученные результаты представляются перспективными для любых систем управления движением распределенных механических систем. Они позволяют провести аналогию с живыми организмами, при движении которых высшие моды не возбуждаются при весьма скромном частотном диапазоне работы нервной системы, так как имеется явный избыток сенсоров и актуаторов.

Список литературы

1. S.O.R. Moheimani, A.J. Fleming, Piezoelectric transducers for vibration control and damping. Springer, 2006.
2. Q. Zhang, J. Jin, J. Zhang, C. Zhao, Active vibration suppression of a 3-DOF flexible parallel manipulator using Efficient Modal Control // Shock and Vibration, Article number 953694, 10 pages (2014). <https://doi.org/10.1155/2014/953694>
3. O. J. Aldraihem, T. Singh, R.C. Wetherhold, Optimal size and location of piezoelectric actuator/sensors: practical considerations // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 23, no. 3, 289-299 (2000). <https://doi.org/10.2514/2.4557>
4. R. Zemcika, P. Sadilek, Modal analysis of beam with piezoelectric sensors and actuators // Applied and Computational Mechanics, vol. 1, 381-386 (2007).
5. L. Meirovitch, H. Baruh, Optimal control of damped flexible gyroscopic systems // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 4, no. 2, 157-163 (1981).
6. A. Baz, S. Poh, Performance of an active control system with piezoelectric actuators // Journal of Sound and Vibration, vol. 126, no. 2, 327-343 (1988).
7. S. P. Singh, H. S. Pruthi, V. P. Agarwal, Efficient modal control strategies for active control of vibrations // Journal of Sound and Vibration, vol. 262, no. 3, 563-575 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00111-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00111-1)
8. S. Cinquemani, D. Ferrari, I. Bayati, Reduction of spillover effects on independent modal space control through optimal placement of sensors and actuators // Smart Materials and Structures, vol. 24, 085006 (2015).
9. I. Bruant, G. Coffignal, F. Lene, A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures // Journal of Sound and Vibration, vol. 243, no. 5, 861-882 (2001). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>
10. F. Botta, D. Dini, C. Schwingshackl, L. di Mare, G. Cerri, Optimal placement of piezoelectric plates to control multimode vibrations of a beam // Advances in Acoustics and Vibration 2013, ID 905160 (2013). <https://doi.org/10.1155/2013/905160>
11. Петраков Е.В., Лофти Пур Х., Дробный Е.В. Активное гашение поперечных колебаний консольной балки пьезоэлектрическими слоями с различными формами электродов // Проблемы прочности и пластичности 81 (4), 429-442 (2019). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-4-429-442>
12. F. Botta, A. Scorza, A. Rossi, Optimal piezoelectric potential distribution for controlling multimode vibrations // Applied Sciences, vol. 8, no. 4, 551 (2018).

<https://doi.org/10.3390/app8040551>

13. C. Peukert, P. Pohlmann, M. Merx, J. Muller, S. Ihlenfeldt, Investigation of local and modal based active vibration control strategies on the example of an elastic system // *Journal of Machine Engineering*, vol. 19, no. 2, 32-45 (2019). <https://doi.org/10.5604/01.3001.0013.2222>

14. A.K. Belyaev, A.V. Fedotov, H. Irschik, M. Nader, V.A. Polyanskiy, N.A. Smirnova, Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // *Structural Control and Health Monitoring*, vol. 25, no. 8, e2105 (2017). <https://doi.org/10.1002/stc.2105>

15. Беляев А.К., Полянский В.А., Смирнова Н.А., Федотов А.В. Процедура идентификации при модальном управлении распределенным упругим объектом // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки* 10 (2), 69-81 (2017). <https://doi.org/10.18721/JPM.10207>

16. Полянский В.А., Смирнова Н.А. Алгоритм гашения упругих колебаний распределенного объекта при избыточном количестве пар сенсор-актуатор. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*, 9(4), 720-728. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.413>

References

1. S.O.R. Moheimani, A.J. Fleming, *Piezoelectric transducers for vibration control and damping*. Springer, 2006.

2. Q. Zhang, J. Jin, J. Zhang, C. Zhao, Active vibration suppression of a 3-DOF flexible parallel manipulator using Efficient Modal Control // *Shock and Vibration*, Article number 953694, 10 pages (2014). <https://doi.org/10.1155/2014/953694>

3. O. J. Aldraihem, T. Singh, R.C. Wetherhold, Optimal size and location of piezoelectric actuator/sensors: practical considerations // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, no. 3, 289-299 (2000). <https://doi.org/10.2514/2.4557>

4. R. Zemcika, P. Sadilek, Modal analysis of beam with piezoelectric sensors and actuators // *Applied and Computational Mechanics*, vol. 1, 381-386 (2007).

5. L. Meirovitch, H. Baruh, Optimal control of damped flexible gyroscopic systems // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 4, no. 2, 157-163 (1981).

6. A. Baz, S. Poh, Performance of an active control system with piezoelectric actuators // *Journal of Sound and Vibration*, vol. 126, no. 2, 327-343 (1988).

7. S. P. Singh, H. S. Pruthi, V. P. Agarwal, Efficient modal control strategies for active control of vibrations // *Journal of Sound and Vibration*, vol. 262, no. 3, 563-575 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00111-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00111-1)

8. S. Cinquemani, D. Ferrari, I. Bayati, Reduction of spillover effects on independent modal space control through optimal placement of sensors and actuators // *Smart Materials and Structures*, vol. 24, 085006 (2015).

9. I. Bruant, G. Coffignal, F. Lene, A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures // *Journal of Sound and Vibration*, vol. 243, no. 5, 861-882 (2001). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>

10. F. Botta, D. Dini, C. Schwingshackl, L. di Mare, G. Cerri, Optimal placement of piezoelectric plates to control multimode vibrations of a beam // *Advances in Acoustics and Vibration* 2013, ID 905160 (2013). <https://doi.org/10.1155/2013/905160>

11. E.V. Petrakov, H. Lofti Pour, E.V. Drobny, Active Damping of transverse vibrations of console beam by piezoelectric layer with different electrode shapes of damaged media // *Problems of strength and plasticity*, 81 (4), 429-442 (2019). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-4-429-442>

-
12. F. Botta, A. Scorza, A. Rossi, Optimal piezoelectric potential distribution for controlling multimode vibrations // Applied Sciences, vol. 8, no. 4, 551 (2018). <https://doi.org/10.3390/app8040551>
 13. C. Peukert, P. Pohlmann, M. Merx, J. Muller, S. Ihlenfeldt, Investigation of local and modal based active vibration control strategies on the example of an elastic system // Journal of Machine Engineering, vol. 19, no. 2, 32-45 (2019). <https://doi.org/10.5604/01.3001.0013.2222>
 14. A.K. Belyaev, A.V. Fedotov, H. Irschik, M. Nader, V.A. Polyanskiy, N.A. Smirnova, Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // Structural Control and Health Monitoring, vol. 25, no. 8, e2105 (2017). <https://doi.org/10.1002/stc.2105>
 15. A.K. Belyaev, V.A. Polyanskiy, N.A. Smirnova, A.V. Fedotov, Identification procedure in the modal control of a distributed elastic system, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 10(2), 69–81 (2017). DOI: 10.18721/JPM.10207
 16. V.A. Polyanskiy, N.A. Smirnova, Algorithm for Damping Elastic Vibrations of a Distributed System with an Excessive Number of Sensor-Actuator Pairs. Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 55, 482–488 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1063454122040148>