

УДК: 534-13  
OECD: 01.03.AA

## Нахождение запрещенных зон распространения звуковых волн в гофрированных трубках методом определения устойчивости решения

Быков Н.В.

Д.т.н., доцент, заведующий кафедрой, РУТ (МИИТ), Москва, РФ

### Аннотация

В работе предложен метод нахождения запрещенных зон распространения звуковых волн в гофрированных трубках, основанный на определении устойчивости численного решения. Основные уравнения получены в рамках приближения длинных волн. Для описания течения среды (жидкости или газа) использована квазиодномерная система газодинамических уравнений. Звуковые волны представляют собой малые возмущения стационарного течения, для которых получены результирующие линеаризованные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Поскольку в решении таких уравнений в случае аperiodического решения содержатся как убывающие, так и неограниченно возрастающие парные слагаемые, численный анализ устойчивости позволяет определить зоны значений параметров, в которых волны в трубке распространяться не могут (запрещенные зоны). Путем численного исследования параметрической устойчивости полученных уравнений при различных значениях параметров, построены диаграммы неустойчивости, соответствующие запрещенным зонам распространения звуковых волн. Показано, что скорость основного потока влияет на смещение частоты запрещенной зоны, позволяя осуществлять управление акустическими свойствами трубки в некотором диапазоне.

**Ключевые слова:** звуковые волны, фильтрация звука, гофрированные трубки, волны в периодических структурах, устойчивость решения, запрещенные зоны.

### *Stopbands of sound waves propagation construction in a corrugated duct by determining the stability of a solution*

*Bykov N.V.*

*DSc, associate professor, head of department, RUT-MIIT, Moscow, Russia*

### **Abstract**

*The paper proposes a method for determining the stopbands of sound waves in corrugated tubes, based on determining the stability of the numerical solution. The basic equations are obtained within the framework of the long wave approximation. The flow of a medium (liquid or gas) is described by a quasi-one-dimensional system of gas-dynamic equations. Sound waves are small perturbations of a stationary flow, for which the resulting linearized differential equations with periodic coefficients are obtained. Since the solution of such equations in the case of an aperiodic solution contains both decreasing and infinitely increasing pair terms, numerical analysis of stability allows one to determine the zones of parameter values in which waves cannot propagate in the duct (i.e. stopbands). By means of a numerical study of the parametric stability of the equations for various parameters, instability diagrams were constructed corresponding to the stopbands of*

sound wave propagation. It is shown that the mean flow velocity affects the stopband frequency shift, allowing control over the acoustic properties of the duct in a certain range.

**Keywords:** acoustic waves, sound filtering, corrugated ducts, waves in periodic structures, stability, stopbands.

## Введение

Гофрированные трубы широко используются в технике (воздуховодах, трубках теплообменников, авиационных системах подачи и других приложениях) благодаря гибкости, сочетающейся в то же время с локальной жесткостью. Малые периодические возмущения шероховатости могут также возникать из-за дефектов изготовления при последовательных проходах инструмента.

Течения в гофрированных трубах известны благодаря их интересным акустическим свойствам [1-4]. Например, поток жидкости через трубу с гофрированными стенками генерирует тональные звуки [5]. Этот эффект возникает из-за неустойчивости тангенциального разрыва, образующегося в полостях гофра, который способствует усилению волн определенных частот, поэтому подразумевается, что течение должно рассматриваться как трехмерное или осесимметричное [2].

Другой акустический режим в гофрированных трубках может рассматриваться в приближении узких трубок, когда длина волны превышает поперечные размеры трубки [6-8]. В этом случае существуют только продольные волны. Если изменение поперечного сечения трубки происходит достаточно медленно с тем, чтобы волновой фронт оставался приблизительно плоским, задача может рассматриваться в квазиодномерном приближении, при котором поле волны зависит только от времени и осевой координаты. Тогда площадь поперечного сечения, являющаяся периодической функцией координаты, формирует периодические коэффициенты соответствующих дифференциальных уравнений. Этим условиям соответствует возможность параметрического возбуждения системы, приводящая к возникновению зон пропускания и запрещенных зон для акустических волн. При этом могут быть рассмотрены две задачи. Первая задача состоит в нахождении спектров звуковых волн в покоящейся среде, а вторая – при наличии основного потока в трубе. Известно, что в первом случае в линейном приближении задача может быть сведена к уравнениям типа Хилла и Матье [6]. Решения этих уравнений содержат парные экспоненциальные слагаемые, которые в зависимости от действительной и мнимой частей аргумента могут давать как периодические, так и возрастающие и затухающие решения. Как известно, чтобы отсечь неограниченно возрастающее аналитическое решение, необходимо потребовать обращения соответствующих констант перед экспонентами в ноль. В численном решении, однако, это может быть не так. В частности, решение соответствующих уравнений в полуограниченной трубке будет содержать как затухающие, так и возрастающие слагаемые, что приводит к возникновению параметрической неустойчивости – неограниченному экспоненциальному возрастанию решения по мере удаления от входа в трубку. Именно с этой точки зрения рассмотрена неустойчивость решения в работе [6]. Поскольку соответствующие экспоненты являются парными, это позволяет определять наличие запрещенных зон распространения волн как областей, в которых численное решение неограниченно возрастает из-за параметрической неустойчивости.

Задачей настоящего исследования является разработка соответствующего метода и построение диаграммы запрещенных зон.

## 1. Теоретическое описание

Рассмотрим полубесконечную гофрированную трубу с входным отверстием, расположенным в сечении с координатой  $x = 0$ . В рамках принятых допущений течение среды (жидкости или газа) внутри трубы описывается квазиодномерными уравнениями сохранения массы и импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v S) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\rho(x, t)$ ,  $v(x, t)$ ,  $p(x, t)$  – плотность, скорость и давление среды соответственно,  $S(x)$  – площадь поперечного сечения трубы.

Следуя теории возмущений, представим параметры течения как сумму основного стационарного несжимаемого потока и наложенных на него нестационарных малых возмущений:

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(x, t), \quad (3)$$

$$p(x, t) = p_0(x) + \varepsilon p_1(x, t), \quad (4)$$

$$v(x, t) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, t), \quad (5)$$

где  $\varepsilon \ll 1$ . Примем, что возмущения давления и плотности в звуковой волне связаны стандартным соотношением  $p_1 = c^2 \rho_1$ , где  $c$  – скорость звука. Параметры несжимаемого стационарного основного потока обозначены нижним индексом 0, а возмущения обозначены нижним индексом 1. После подстановки (3)-(5) в уравнения (1) и (2) и дальнейшего упрощения можно получить линеаризованные уравнения для возмущений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + v_0(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{S'(x)}{S(x)} v_1(x, t) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0(x) \frac{\partial v_1}{\partial x} + c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + v_0'(x) v_1(x, t) + v_0(x) v_0'(x) \frac{\rho_1(x, t)}{\rho_0} = 0, \quad (7)$$

при этом скорость и давление в основном потоке определяются соответствующим стационарным решением:

$$v_0(x) = \frac{A}{S(x)}, \quad (8)$$

$$p_0(x) = p_0(0) + \frac{1}{2} \rho_0 (v_0^2(0) - v_0^2(x)) = p_0(0) + \frac{1}{2} \rho_0 \left( v_0^2(0) - \frac{A^2}{S^2(x)} \right), \quad (9)$$

где константа  $A$  определяется объемным расходом на входе в трубку,  $A = v_0(0)S(0)$ . Таким образом, если  $S(x)$  является периодической функцией  $x$ , так что  $S(x + L) = S(x)$  то  $v_0(x)$  также является периодической с периодом  $L$ .

Будем искать решение уравнений (6)-(7) в виде гармонических волн:

$$\rho_1(x)/\rho_0 = r(x)e^{-i\omega t}/2 + c.c.,$$

$$v_1(x, t)/c = u(x)e^{-i\omega t}/2 + c.c.,$$

где  $c.c.$  обозначает комплексное сопряжение. Тогда уравнения (6) и (7) относительно безразмерных огибающих  $r(z)$  и  $u(z)$  для безразмерной координаты  $z = 2\pi x/L$  приобретают вид:

$$u'(z) + M(z)r'(z) + S'(z)u(z)/S(z) - i\gamma r(z) = 0, \quad (10)$$

$$r'(z) + M(z)u'(z) + M(z)M'(z)r(z) + (M'(z) - i\gamma)u(z) = 0, \quad (11)$$

где  $\gamma = \omega L/(2\pi c)$  – безразмерная постоянная распространения и  $M(x) = v_0(x)/c$  – число Маха основного потока. При этом предположение о несжимаемости основного потока означает, что  $M(x)$  не превышает значений  $0,2 \dots 0,3$ . Система (10)-(11) представляет собой линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

При отсутствии основного потока уравнения (10)–(11) могут быть приведены к следующему:

$$r''(z) + (S'(z)/S(z))r'(z) - \gamma^2 r(z) = 0, \quad (12)$$

которое можно упростить, введя новую переменную  $y(z) = r(z)\sqrt{S_0(z)}$  для получения уравнения Хилла:

$$y''(z) + (\gamma^2 + f(z))y(z) = 0, \quad (13)$$

где  $f(z)$  – периодическая функция, зависящая от  $S(z)$ :

$$f(z) = \left(\frac{S'(z)}{2S(z)}\right)^2 + \frac{S''(z)}{2S(z)}. \quad (14)$$

Вводя выражение для периодического сечения трубы:

$$S(x) = S_0(1 + \mu \sin z), \quad (15)$$

где  $S_0 = S(0)$ , а  $\mu$  – амплитуда гофра, можно получить:

$$\frac{S'(z)}{S(z)} = \frac{\mu \cos z}{1 + \mu \sin z}. \quad (16)$$

Для функции  $S(z)$ , определяемой формулой (14), это приводит к следующему выражению для  $f(z)$ :

$$f(z) = -\mu \frac{2 \sin z - \mu(1 - 3 \sin^2 z)}{4(1 + \mu \sin z)^2}, \quad (17)$$

Линейная часть  $f(z)$  относительно  $\mu$  дает  $f(z) = -(\mu/2) \sin z + O(\mu)^2$ , что приводит к классической форме уравнения Матье:

$$y''(z) + (\gamma^2 - (\mu/2) \sin z)y(z) = 0, \quad (18)$$

для которого наличие параметрического резонанса хорошо известно [9].

В работе [6] было показано, что при наличии основного потока линеаризация уравнений (10) и (11) относительно  $\mu$ , при дополнительном предположении, что  $M \ll 1$ , приводит к относительно простому уравнению Хилла с первой областью неустойчивости (запрещенной зоной), приближенно описываемой неравенством:

$$1 - \frac{\mu}{2} < \frac{\gamma}{1 - M^2(0)} < 1 + \frac{\mu}{2}. \quad (19)$$

Отсюда видно, что ширина и положение запрещенной зоны зависят от скорости основного потока.

## 2. Результаты численных исследований и их анализ

Тот факт, что уравнения (10) и (11) содержат периодические коэффициенты, означает, что общее решение этой системы уравнений содержит парные экспоненциальные слагаемые вида  $\exp(\pm iRz)$ . Характер решения (периодический, возрастающий или затухающий) определяется мнимой частью числа  $R$ . Решение всегда содержит парные экспоненты, одна из которых соответствует возрастающему решению, вторая — затухающему. В аналитическом решении константу перед возрастающим слагаемым следовало бы положить равной нулю по физическому смыслу решения. Однако, при численном решении это сделать невозможно, что приводит к параметрическому усилению распространяющейся по трубке волны. Таким образом, значения параметров, соответствующие запрещенным зонам распространения волн, можно определить по наличию неустойчивости численного решения, не прибегая к линеаризации системы (10)-(11) по амплитуде гофра.

Исследуем области устойчивости решений численно, решая уравнения (10) и (11) с начальными условиями (параметры среды на входе в трубку) в каждой точке сетки  $(\mu, \gamma)$  размерностью  $1000 \times 1000$ . Условие, при котором решение считается неустойчивым, состоит в том, что амплитуды  $u(z)$  или  $r(z)$  при  $z = 1000$  более чем в 10 раз превышают соответствующие амплитуды на входе (при  $z = 0$ ). Для ускорения процесса были проведены параллельные вычисления. Решая эту задачу для нескольких чисел Маха основного потока на входе  $M(0)$ , получаем диаграммы устойчивости, представленные на рис. 1. Области неустойчивости, соответствующие запрещенным зонам, окрашены в черный цвет, т.е. для любых  $\gamma$  и  $\mu$  внутри этих полос численное решение уравнений (10) и (11) обладает параметрической неустойчивостью.

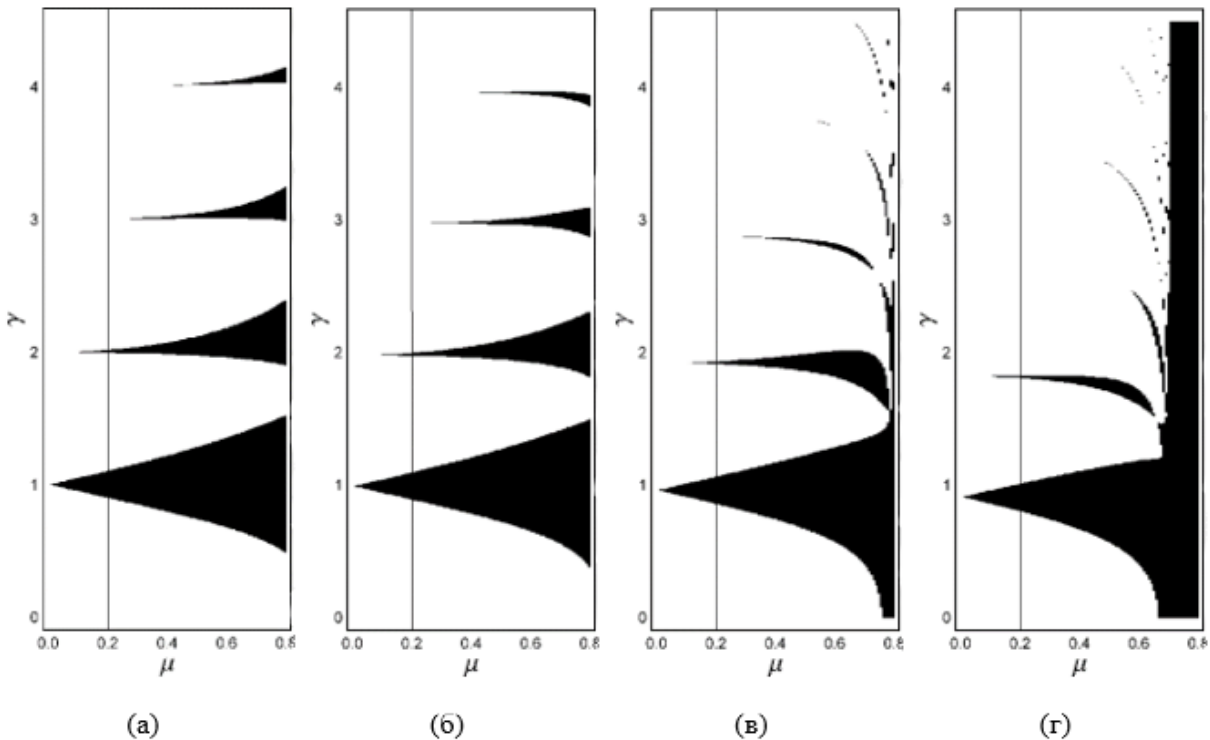


Рис. 1. Области неустойчивости решений уравнений (10)-(11) при различных числах Маха основного потока: (а)  $M(0) = 0$ ; (б)  $M(0) = 0,1$ ; (в)  $M(0) = 0,2$ ; (г)  $M(0) = 0,3$

Отметим, что полученные диаграммы неустойчивости численных решений не совпадают с диаграммами запрещенных зон, поскольку области решений правее  $\mu = 0,2$  представляют скорее математический интерес: при больших значениях амплитуды гофра исходные допущения о плоском фронте волны может не выполняться. Эта граница отмечена на диаграммах вертикальной линией.

Показаны первые четыре полосы неустойчивости с приблизительными центральными длинами волн  $\lambda \approx L/n, n = 1, 2, 3, 4$ . Первая и самая широкая полоса неустойчивости ( $\lambda \approx L$ ) почти симметрична и относительно точно описывается в рамках принятых допущений, особенно для малых чисел Маха. Полосы неустойчивости высших порядков имеют порог амплитуды гофра  $\mu$ , и чем выше порядок полосы, тем больше этот порог. Видно, что при увеличении числа Маха происходит смещение полос по частоте, причем вторая полоса более чувствительна к числу Маха, чем первая. В целом такой характер влияния параметров на первую зону хорошо согласуется с приближенным решением (19): увеличение  $M(0)$  приводит к смещению  $\gamma$  к более низким значениям, а ширина запрещенной зоны порядка амплитуды гофра  $\mu$ .

С точки зрения математических свойств уравнений примечательно, что при  $M(0)=0,3$  (рис. 1, (г)) появляется область, для которой неустойчивость является безусловной по  $\gamma$  (примерно  $\mu > 0,7$ ). Отметим снова, что решение в этой области не удовлетворяет начальным допущениям и поэтому не представляет физического интереса.

### Заключение

Предложенный метод нахождения запрещенных зон распространения акустических волн в каналах с периодической площадью поперечного сечения основан на численном определении устойчивости линеаризованной системы уравнений относительно малых возмущений параметров потока. Достоинством метода является то, что он может быть использован при различных законах изменения площади поперечного сечения, а не только синусоидальных, поскольку для численного решения уравнений такого допущения не требуется. В то же время необходимо отметить, что для этого нужно выполнение исходных допущений, то есть поперечное сечение канала должно меняться достаточно гладко, чтобы не нарушать гипотезы о плоском фронте волны.

Результаты численного исследования совпали для частного случая, в котором в более ранних работах автора было получено аналитическое решение.

Анализ результатов показывает, что наиболее широкой и, как следствие, практически значимой, является первая запрещенная зона для звуковых волн с длиной порядка периода гофра. При этом увеличение скорости основного потока позволяет смещать центр запрещенной зоны в область более низких частот. Для смещения области в зону более высоких частот нужно создать поток, текущий в обратном направлении (навстречу бегущей волне). Смещение центра запрещенной зоны составляет порядка 5-7%. Теоретически, это позволяет управлять акустическими свойствами гофрированных трубок в небольшом диапазоне частот.

### Список литературы

1. Rajavel B., Prasad M.G. Acoustics of corrugated pipes: A review // Appl. Mech. Rev. 2013. Vol. 65, № 5. P. 050000-1 - 050000-24.
2. Nakiboğlu G., Belfroid S.P.C., Golliard J., Hirschberg A. On the whistling of corrugated pipes: Effect of pipe length and flow profile // Journal of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 672. P. 78–108.

3. Galeron G., Amielh M., Mattei P.-O. Characterization of acoustic sources in a corrugated pipe flow with linear stochastic estimation // *J. Acoust. Soc. Am.* 2021. Vol. 150, № 60. P. 4268.
4. Lim H.-C., Razi F. Experimental Study of Flow-Induced Whistling in Pipe Systems Including a Corrugated Section // *Energies*. 2018. Vol. 11. № 8. P. 1954.
5. Crawford F.S. Singing corrugated pipes // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. Vol. 58, № S1. P. S2–S2.
6. Быков Н.В., Пустовойт В.И. Об устойчивости течения жидкости в канале периодического сечения // *Доклады Академии Наук. Физика*, 2010. Т. 433. №5. С. 625–630.
7. Lau F.J.P., Campos L.M.B.C. On the effect of wall undulations on the acoustics of ducts with flow // *J. Sound Vib.* 2004. Vol. 270, № 1–2. P. 361–378.
8. Hawwa M.A. Asymptotic wave speed estimation in weakly undulated ducts carrying mean flow // *J. Sound Vib.*, 2015. Vol. 357. P. 245–252.
9. Chen G., Tian J., Bin-Mohsin B., Nessler R., Svidzinsky A., Scully M.O. Parametric resonances: from the Mathieu equation to QASER // *Phys. Scr.* 2016. Vol. 91, № 7. P. 073004.

## References

1. Rajavel B., Prasad M.G. Acoustics of corrugated pipes: A review // *Appl. Mech. Rev.* 2013. Vol. 65, № 5. P. 050000-1 - 050000-24.
2. Nakiboğlu G., Belfroid S.P.C., Golliard J., Hirschberg A. On the whistling of corrugated pipes: Effect of pipe length and flow profile // *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 672. P. 78–108.
3. Galeron G., Amielh M., Mattei P.-O. Characterization of acoustic sources in a corrugated pipe flow with linear stochastic estimation // *J. Acoust. Soc. Am.* 2021. Vol. 150, № 60. P. 4268.
4. Lim H.-C., Razi F. Experimental Study of Flow-Induced Whistling in Pipe Systems Including a Corrugated Section // *Energies*. 2018. Vol. 11. № 8. P. 1954.
5. Crawford F.S. Singing corrugated pipes // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. Vol. 58, № S1. P. S2–S2.
6. Bykov N. V., Pustovoit V.I. On the stability of fluid flow in a periodic channel // *Dokl. Phys.* 2010. Vol. 55, № 8. P. 409–414.
7. Lau F.J.P., Campos L.M.B.C. On the effect of wall undulations on the acoustics of ducts with flow // *J. Sound Vib.* 2004. Vol. 270, № 1–2. P. 361–378.
8. Hawwa M.A. Asymptotic wave speed estimation in weakly undulated ducts carrying mean flow // *J. Sound Vib.*, 2015. Vol. 357. P. 245–252.
9. Chen G., Tian J., Bin-Mohsin B., Nessler R., Svidzinsky A., Scully M.O. Parametric resonances: from the Mathieu equation to QASER // *Phys. Scr.* 2016. Vol. 91, № 7. P. 073004.