

УДК: 62.752 629.4.015, 628.534, 519.71-74

OECD: 02.03.IU, 02.03.PU

## Системный подход к оценке состояний вибрационных полей технических объектов в задачах динамики транспортных и технологических машин

Елисеев А.В.<sup>1,2\*</sup>, Кузнецов Н.К.<sup>3</sup>, Миронов А.С.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> к.т.н., доцент, доцент кафедры математики

<sup>2</sup> к.т.н., доцент, доцент кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении

<sup>3</sup> д.т.н., профессор, зав. кафедрой конструирования и стандартизации в машиностроении

<sup>4</sup> соискатель

<sup>1,4</sup> Иркутский государственный университет путей сообщения

<sup>2,3</sup> Иркутский национальный исследовательский технический университет

<sup>1,2,3,4</sup> г. Иркутск, РФ

### Аннотация

Развивается научно-методологическая база оценки, контроля и формирования состояний вибрационного поля технического объекта транспортного или технологического назначения. В качестве расчетных схем используются механические колебательные системы с сосредоточенными параметрами. Моделью технического объекта служит механическая колебательная система, образованная твердым телом, находящимся в условиях связанных нагружений силовой природы. Применяется структурный подход, в рамках которого механическим колебательным системам ставятся в соответствие структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Оценка состояний вибрационного поля проводится на основе передаточных отношений амплитуд колебаний точек твердого тела, в общем случае зависящих от параметра в виде коэффициента связности внешних силовых возмущений. В рамках развиваемых представлений показано, что состояния вибрационного поля могут быть охарактеризованы конечными наборами динамических инвариантов, отображающих существенные особенности в виде количества резонансов, режимов обнуления и знакоопределенных форм. Разработан подход к оценке совокупности состояний вибрационного поля, отличающийся тем, что семейство состояний вибрационного поля разбивается на динамические инварианты с помощью частотных функций обнуления и резонанса.

**Ключевые слова:** структурное математическое моделирование, механическая колебательная система, межпарциальная связь, вибрационное поле, связанные силовые возмущения, динамические состояния.

### *Systematic approach to assessing the states of vibration fields of technical objects in problems of dynamics of transport and technological machines*

*Eliseev A. V.<sup>1,2\*</sup>, Kuznetsov N. K.<sup>3</sup>, Mironov A. S.<sup>4</sup>*

<sup>1</sup> *PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics*

<sup>2</sup> *Associate Professor of the Department of Design and Standardization in Mechanical Engineering*

<sup>3</sup> *DSc, Professor, Head of the Department of Design and Standardization in Mechanical Engineering*

<sup>4</sup> *Applicant*

<sup>1,4</sup> *Irkutsk State Transport University*

<sup>2,3</sup> *Irkutsk National Research Technical University*

<sup>1,2,3,4</sup> *Irkutsk, Russia*

**Abstract**

*The scientific and methodological basis of assessment, control and formation of the states of the vibration field of a technical object of transport or technological purpose is being developed. Mechanical oscillatory systems with concentrated parameters are used as calculation schemes. The model of a technical object is a mechanical oscillatory system formed by a solid body under conditions of connected loads of a force nature. A structural approach is applied. Within the framework of structural mathematical modeling of a mechanical oscillatory system, a block diagram of a dynamically equivalent automatic control system is aligned. The evaluation of the states of the vibrational field is carried out on the basis of the transfer ratios of the oscillation amplitudes of the points of the solid. The transfer functions depend on the coefficient of connectivity of external force disturbances. It is shown that the states of the vibrational field can be characterized by finite sets of dynamic invariants. Dynamic invariants display the number of resonances, zeroing modes, and familiar shapes. An approach has been developed to evaluate the totality of vibrational field states, characterized in that the family of vibrational field states is divided into dynamic invariants using frequency zeroing and resonance functions.*

**Keywords:** *structural mathematical modeling, mechanical oscillatory system, interpartial tie, vibration field, tied power excitations, dynamic states.*

**Введение**

Проблемы обеспечения безопасности эксплуатации технических объектов в строительной индустрии, химической промышленности, в области переработки полезных ископаемых, при транспортировке и классификации сыпучих гранулированных сред актуализируют развитие междисциплинарных подходов, охватывающих машиноведение, прикладную и теоретическую механику, теорию автоматического управления, теории систем и др. [1-3]. Развитие представлений о причинах снижения эффективности работы оборудования, выхода из строя технических систем, возникновения опасных ситуаций на производстве обращает внимание на технические объекты транспортного и технологического назначения, находящиеся в условиях интенсивных динамических нагружений [4]. Роль вибрационных взаимодействий в обеспечении безопасности эксплуатации технических объектов предопределяет необходимость разработки научно-методологических основ оценки, контроля и формирования динамических состояний рабочих органов вибрационных технологических машин [5-8]. Особенности вибрационных нагружений могут рассматриваться в качестве механических факторов безопасности технических объектов, работающих в условиях интенсивных динамических взаимодействий [9-11].

При всем разнообразии технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагружений, выбор расчетных схем для предварительных исследований и оценок связан с механическими колебательными системами с одной, двумя и тремя степенями свободы в предположении малости сил трения [12,13]. В задачах динамики вибрационных взаимодействий элементов технологических машин распространение получили расчетные схемы в виде механических колебательных систем, образованных твердым телом на упругих опорах, совершающим вынужденные колебания под действием возмущений силовой природы. В задачах динамики технологических машин значение приобретают методы оценки вибрационного поля рабочего органа, основанные на учете распределения амплитуд колебаний точек рабочих поверхностей, зависящего от внешних силовых факторов [8].

В качестве методологической базы разработки математических моделей

технических объектов, расчетными схемами которых служат линейные колебательные системы, распространение получил структурный подход, отличающийся тем, что механическим колебательным системам сопоставляются структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [14]. Структурный подход показал свою эффективность в моделировании линейных или линеаризованных систем, совершающих малые установившиеся механические колебания относительно положения статического равновесия. К преимуществам подхода можно отнести возможность моделирования объектов с помощью методов теории автоматического управления, теории систем, системного анализа и динамических аналогий [15]. В рамках структурного подхода задачи оценки состояний вибрационного поля могут быть решены на основе представлений о передаточных функциях структурной схемы, обладающей входными и выходными сигналами. Состояние вибрационного поля может быть оценено на основе передаточной функции, для которой входными и выходными сигналами служат колебания точек рабочего органа [16,17]. На основе отношений амплитуд колебаний точек поверхности рабочего органа можно формировать представления о разнообразии возможных состояний вибрационного поля, включая однородность, в зависимости от внешних факторов. Одним из ключевых факторов разнообразия состояний вибрационного поля служит коэффициент связности внешних силовых возмущений, который с физической точки зрения отображает особенности вибраторов, установленных в точках рабочего органа для реализации технологических режимов [18]. С формальной точки зрения коэффициент связности внешних возмущений определяет параметрическое семейство механических колебательных систем, отображающих особенности состояний вибрационного поля технического объекта. Для оценки возможных состояний вибрационного поля может быть поставлена задача учета динамических особенностей в виде количества резонансов, режимов обнуления и форм вибрационного поля в зависимости от частоты и коэффициента связности внешних возмущений. Задача определения возможных состояний вибрационного поля предполагает развитие представлений о динамических инвариантах, отображающих возможности сохранения количества динамических особенностей на интервальных множествах коэффициента связности и возможности разрывов в критических значениях коэффициента связности [19].

Вместе с тем, концепция динамических инвариантов вибрационного поля технического объекта, расчетной схемой которого служит механическая колебательная система, образованная твердым телом с тремя степенями свободы, находящимся в условиях связанных силовых возмущений, ещё не получила должного развития в рамках структурного подхода.

Предлагаемая статья посвящена применению концепции динамических инвариантов в решении задачи оценки многообразия состояний вибрационных полей технических объектов, находящихся в условиях связанных силовых возмущений.

## 1. Основные положения. Постановка задачи

Рассматривается механическая колебательная система, образованная плоским твердым телом  $ABC$  (рис.1) с массой  $M_0$  и моментами инерции  $J_1, J_2$ , совершающим установившиеся малые упругие колебания относительно положения статического равновесия под воздействием гармонических синфазных силовых возмущений  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Твердое тело, помещенное на упругие опоры, совершает установившиеся колебания на частоте внешних силовых возмущений. Вибрационное поле твердого тела оценивается на основе отношения амплитуд колебаний в точках измерения. Силовые возмущения формируют совокупность состояний вибрационных полей твердого тела,

оцениваемую на основе передаточных отношений амплитуд колебаний. В зависимости от частот внешних силовых возмущений передаточное отношение может принимать отрицательные, положительные, нулевые и сколь угодно большие по модулю значения, отображающие в своей совокупности режимы обнуления амплитуд колебаний, резонансы и знакоопределенные формы вибрационного поля.

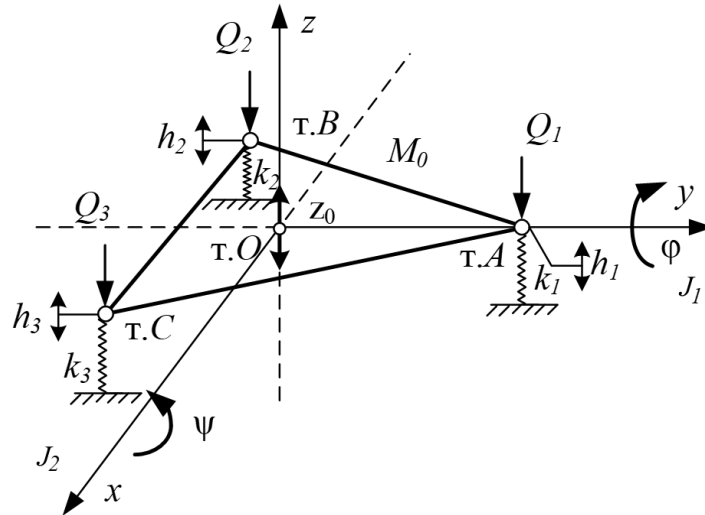


Рис. 1. Расчетная схема механической колебательной системы с тремя степенями свободы:  $ABC$  – твердое тело;  $Q_1, Q_2, Q_3$  – внешние силовые возмущения;  $k_1, k_2, k_3$  – упругие элементы, т.О – центр масс,  $M_0$  – масса твердого тела,  $J_1, J_2$  – моменты инерции

Учет связности внешних силовых возмущений расширяет совокупность возможных состояний вибрационного поля твердого тела. Для оценки разнообразия состояний вибрационного поля на основе амплитуд колебаний точек поверхности рабочего органа может быть выбран подход, учитывающий существенные особенности состояний в рамках обобщенных представлений, отображающих количество знакоопределенных форм динамических взаимодействий, режимов обнуления и резонансов.

Задача заключается в разработке метода оценки состояний вибрационных полей твердых тел с тремя степенями свободы, находящихся в условиях связанных нагружений силовой природы, отображающего количественные характеристики существенных динамических особенностей отношения амплитуд колебаний в точках измерения.

## 2. Математическая модель

Рассматривается декартова система координат  $(x, z, y)$  с центром в т.  $O$  (рис.1). В качестве двух эквивалентных вариантов обобщенных координат твердого тела  $ABC$  рассматриваются  $\{h_1, h_2, h_3\}$  – смещения тт.  $A, B, C$  относительно положения статического равновесия и упорядоченный набор  $\{z_0, \varphi, \psi\}$ , где  $z_0$  – вертикальное смещение центра масс твердого тела,  $\varphi, \psi$  – угловые повороты твердого тела вокруг осей инерции, направленных вдоль осей  $Ox, Oy$  неподвижной декартовой системы координат  $Oxyz$ . Предполагается, что центр масс твердого тела в положении равновесия находится в т.  $O$  начала системы координат. Обобщенные координаты  $\{h_1, h_2, h_3\}$  и  $\{z_0, \varphi, \psi\}$  связаны между собой преобразованием:

$$h = U\zeta \quad (1)$$

где  $U = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ ,  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ ,  $\zeta = \begin{pmatrix} z_0 \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ ,  $x_i, y_i, i = 1, 2, 3$  координаты тт.

$A, B, C$  крепления к плоскому твердому телу упругих элементов с жесткостями  $k_1, k_2, k_3$  [20].

Потенциальная энергия системы в обобщенных координатах  $\{h_1, h_2, h_3\}$  может быть представлена в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \langle Kh, h \rangle, \quad (2)$$

где  $K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$ ,  $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$  – скалярное произведение векторов  $u$  и  $v$ .

Кинетическая энергия движения твердого тела в координатах  $\{z_0, \varphi, \psi\}$  представляется:

$$T = \frac{1}{2} \langle M \dot{\zeta}, \dot{\zeta} \rangle, \quad (3)$$

где  $M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}$ ,  $\dot{\zeta}$  – вектор обобщенных скоростей. Дифференциальные

уравнения Лагранжа 2-ого рода могут быть представлены в матричном виде:

$$(U^{-1})^T M U^{-1} \ddot{h} + K \vec{h} = \vec{q}, \quad (4)$$

где  $\ddot{h}$  – вектор обобщенных ускорений,  $q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$  – вектор силовых возмущений.

Связность внешних силовых возмущений имеет вид:

$$Q_2 = \gamma_2 Q_1, \quad Q_3 = \gamma_3 Q_1, \quad (5)$$

где  $\gamma_2, \gamma_3$  – коэффициенты связности, которые могут принимать положительные, нулевые и отрицательные значения, в физическом плане отображающие связь между характеристиками возможных вибраторов, установленных на твердое тело для создания вибрационного поля.

Под действием интегрального преобразования Лапласа система дифференциальных уравнений (4) с учетом нулевых начальных условий может быть приведена к алгебраической системе:

$$((U^{-1})^T M U^{-1} p^2 + K) \bar{h} = \bar{q}, \quad (6)$$

где  $p = j\omega$  – комплексная переменная,  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $\omega$  – частота внешнего кинематического возмущения, символ «-» над векторными функциями  $h$  и  $q$  означает интегральное преобразование Лапласа [20].

Если элементы матрицы  $(U^{-1})^T M U^{-1}$  в выражении (6) обозначить  $m_{ij}$ :

$$(U^{-1})^T M U^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

то алгебраическая система (6), представленная структурной схемой (рис.2) с помощью известных методов [15], примет вид, где  $m_{ij}$  определяет особенности парциальных систем и межпарциальных связей.

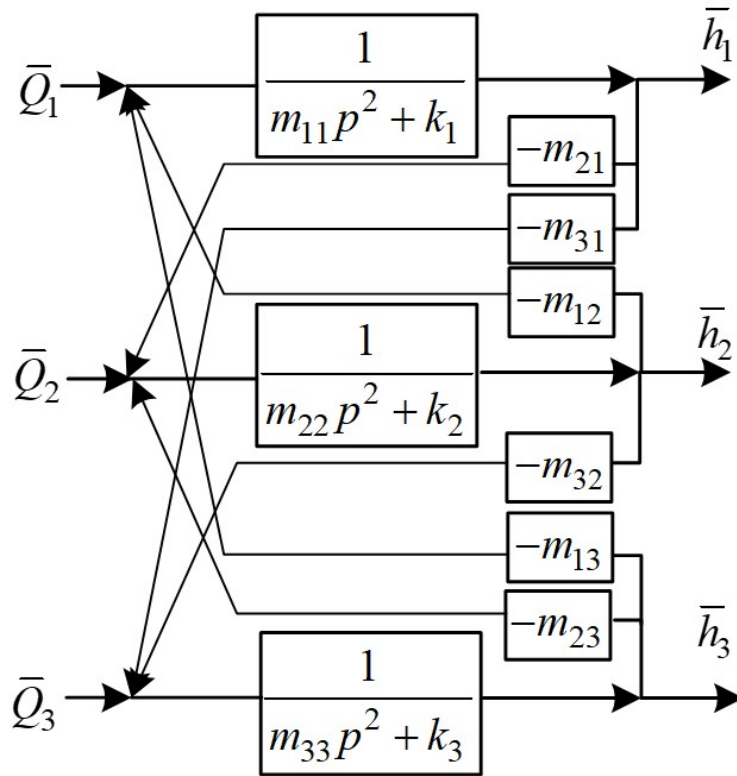


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы (рис.1)

Для оценки состояний вибрационного поля твердого тела с учетом связности силовых возмущений на основе структурной схемы (рис.2) могут быть построены передаточные функции межпарциальных связей  $W_{21}(p)$ ,  $W_{31}(p)$ ,  $W_{32}(p)$ :

$$W_{21}(p) = \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1}, \tag{8}$$

$$W_{31}(p) = \frac{\bar{h}_3}{\bar{h}_1}, \tag{9}$$

$$W_{32}(p) = \frac{\bar{h}_3}{\bar{h}_2}. \tag{10}$$

Передаточные функции (8)-(10) в физическом смысле отображают представления о распределении амплитуд колебаний точек твердого тела [18]. Особенности распределения амплитуд в зависимости от частоты внешних кинематических возмущений могут быть отображены с помощью амплитудно-частотных характеристик передаточных функций межпарциальных связей (8)-(10):

$$A_{21}(\omega) = W_{21}(j\omega), \tag{11}$$

$$A_{31}(\omega) = W_{31}(j\omega), \tag{12}$$

$$A_{32}(\omega) = W_{32}(j\omega). \tag{13}$$

С обобщенной точки зрения, учитывающей существенные особенности, совокупность состояний вибрационных полей на частотных интервалах может быть

отображена конечным набором частот резонанса, частот режимов обнуления и частотных интервалов знакоопределенных форм вибрационного поля, представляющим так называемый динамический инвариант. С помощью динамических инвариантов могут быть отображены свойства системы сохранять или изменять существенные особенности вибрационного поля [21]. «Переход» системы между обобщенными динамическими состояниями, которые характеризуются различными динамическими инвариантами, зависит от возможности совмещения частот, вызывающих эффект обнуления амплитуд колебаний, с частотами, вызывающими эффект резонанса амплитуды. По мере изменения коэффициентов связности сближение частоты обнуления с частотой резонанса способно приводить к взаимному устранению критических режимов и изменению количества знакоопределенных форм вибрационных полей.

### 3. Оценка совокупности состояний вибрационного поля системы с учетом связности силовых возмущений

В предположении связности силовых возмущений (5) алгебраическая система (6) может быть представлена в виде:

$$\left( \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot p^2 + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Передаточные функция, отображающие в физическом смысле особенности распределения амплитуд колебаний, представляют собой дробно-рациональные выражения, включающие коэффициенты связности:

$$W_{21}(p) = \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1} = \frac{H_2(p)}{H_1(p)} = \frac{A_2 p^4 + (B_2 + C_2) p^2 + D_2}{A_1 p^4 + (B_1 + C_1) p^2 + D_1}, \quad (15)$$

где

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} \\ \gamma_2 & m_{22} & m_{23} \\ \gamma_3 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m_{13} \\ \gamma_2 & k_2 & m_{23} \\ \gamma_3 & 0 & m_{33} \end{vmatrix}, \quad C_1 = \begin{vmatrix} 1 & m_{12} & 0 \\ \gamma_2 & m_{22} & 0 \\ \gamma_3 & m_{32} & k_3 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & k_2 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & k_3 \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} m_{11} & 1 & m_{13} \\ m_{21} & \gamma_2 & m_{23} \\ m_{31} & \gamma_3 & m_{33} \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} k_1 & 1 & m_{13} \\ 0 & \gamma_2 & m_{23} \\ 0 & \gamma_3 & m_{33} \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} m_{11} & 1 & 0 \\ m_{21} & \gamma_2 & 0 \\ m_{31} & \gamma_3 & k_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} k_1 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & k_3 \end{vmatrix},$$

$$H_2(p) = A_2 p^4 + (B_2 + C_2) p^2 + D_2, \quad (16)$$

$$H_1(p) = A_1 p^4 + (B_1 + C_1) p^2 + D_1. \quad (17)$$

Выражение передаточной функции (15) образовано биквадратными многочленами  $H_1(p)$  и  $H_2(p)$ , коэффициенты которых могут быть представлены в виде сумм определителей, сформированных из элементов матрицы системы (14).

Частоты  $\theta_0, \theta_1$ , обнуляющие амплитуды колебаний обобщенной координаты  $h_2$ , определены из условия  $H_2(j\omega) = 0$  (16), имеющего вид биквадратного уравнения относительно  $\omega$ . Частоты резонансов  $\rho_1, \rho_2$  определены из условия  $H_1(j\omega) = 0$  (17). В случае совпадения частот  $\theta_i$  и  $\rho_j$  эффекты обнуления и резонанса могут взаимоустраняться.

Коэффициенты связности  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  определяют взаимное расположение частот обнуления относительно резонансных частот. Всевозможные взаимные расположения

частот обнуления  $\theta_0, \theta_1$  относительно частот резонанса  $\rho_1, \rho_2$  определяют разнообразие обобщенных состояний вибрационного поля твердого тела.

Учет координат крепления и жесткостей упругих элементов позволяет находить частоты обнуления и частоты резонансов в зависимости от коэффициентов связности внешних силовых возмущений.

#### 4. Оценка совокупности обобщенных состояний вибрационного поля с учетом симметрии параметров системы

Предполагается, что точки крепления упругих элементов образуют равнобедренный треугольник с основанием и высотой, направленными параллельно осям  $OX$  и  $OY$  соответственно (рис.1). Рассматриваемый частный случай крепления упругих элементов может быть представлен с помощью координат точек, расположенных симметрично относительно высоты:

$$x_1 = 0, y_1 = l_1, x_2 = -l_2, y_2 = -l_3, x_3 = l_2, y_3 = -l_3. \quad (18)$$

Дополнительно предполагается условие равенства жесткостей упругих элементов, прикрепленным в симметричных тт. и :

$$k_2 = k_3. \quad (19)$$

С учетом условий (5), (18), (19) соответствующие числитель и знаменатель передаточной функции (15) вычисляются по формулам:

$$H_1(p) = -\frac{(J_1 p^2 + 2k_2 l_2^2)}{4(l_1 + l_3)^2 l_2^2} \cdot (((\gamma_2 + \gamma_3)(l_3 l_1 M - J_2)k_2 - (M l_1^2 + J_2)k_1)p^2 - 2(l_1 + l_3)^2 k_1 k_2), \quad (20)$$

$$H_2(p) = \begin{vmatrix} \frac{l_3^2 M + J_2}{(l_1 + l_3)^2} p^2 + k_1 & 1 & \frac{l_1 l_3 M - J_2}{2(l_1 + l_3)^2} p^2 \\ \frac{l_1 l_3 M - J_2}{2(l_1 + l_3)^2} p^2 & \gamma_2 & \left( \frac{l_1^2 M + J_2}{4(l_1 + l_3)^2} - \frac{J_1}{4l_2^2} \right) p^2 \\ \frac{l_1 l_3 M - J_2}{2(l_1 + l_3)^2} p^2 & \gamma_3 & \left( \frac{l_1^2 M + J_2}{4(l_1 + l_3)^2} + \frac{J_1}{4l_2^2} \right) p^2 + k_3 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

При выполнении условий (18), (19) одна из частот резонанса  $\rho_0$  имеет вид:

$$\rho_0 = l_2 \sqrt{\frac{2k_2}{J_1}}. \quad (22)$$

В зависимости от коэффициентов связности передаточная функция  $W_{11}(p)$  представляет дробно-рациональное выражение:

$$W_{21}(p) = \frac{-\begin{vmatrix} m_{21} p^2 & m_{23} p^2 \\ m_{31} p^2 & m_{33} p^2 + k_3 \end{vmatrix} + \gamma_2 \begin{vmatrix} m_{11} p^2 + k_1 & m_{13} p^2 \\ m_{31} p^2 & m_{33} p^2 + k_3 \end{vmatrix} - \gamma_3 \begin{vmatrix} m_{11} p^2 + k_1 & m_{13} p^2 \\ m_{21} p^2 & m_{23} p^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{22} p^2 + k_2 & m_{23} p^2 \\ m_{31} p^2 & m_{33} p^2 + k_3 \end{vmatrix} - \gamma_2 \begin{vmatrix} m_{12} p^2 & m_{13} p^2 \\ m_{32} p^2 & m_{33} p^2 + k_3 \end{vmatrix} + \gamma_3 \begin{vmatrix} m_{12} p^2 & m_{13} p^2 \\ m_{22} p^2 + k_2 & m_{23} p^2 \end{vmatrix}}. \quad (23)$$

Передаточная функция (15) отображает отношение амплитуды колебания т.А к амплитуде колебания т. твердые тела при условии связности (5).

Совокупность обобщенных динамических состояний, отображаемых передаточной функцией (23), определяется взаимным расположением частот обнуления  $\theta_1, \theta_2$  по отношению к частотам резонанса  $\rho_1, \rho_2$  и в общем случае зависит от коэффициентов связности  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ .



Совокупность состояний вибрационного поля может быть построена в зависимости от одного параметра  $\gamma_3$  в предположении, что  $\gamma_2 = 1$ . Для построения динамических инвариантов использованы частотные кривые  $\Gamma^{(0)}$ ,  $\Gamma^{(\infty)}$ , отображающие соответствие между коэффициентам связности  $\gamma_3$  и частотами, на которых реализуется эффект обнуления амплитуды колебания и эффект резонанс, соответственно. Кривые  $\Gamma^{(0)}$ ,  $\Gamma^{(\infty)}$  могут быть заданы в неявной форме с помощью функций  $\gamma_3^{(0)}(\omega)$ ,  $\gamma_3^{(\infty)}(\omega)$ , удовлетворяющих уравнениям:

$$\begin{vmatrix} m_{11}\omega^2 - k_1 & 1 & m_{13}\omega^2 \\ m_{21}\omega^2 & 1 & m_{23}\omega^2 \\ m_{31}\omega^2 & \gamma_3^{(0)}(\omega) & m_{33}\omega^2 - k_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m_{12}\omega^2 & m_{13}\omega^2 \\ 1 & m_{12}\omega^2 - k_2 & m_{23}\omega^2 \\ \gamma_3^{(\infty)}(\omega) & m_{32}\omega^2 & m_{33}\omega^2 - k_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

В явном виде кривая  $\Gamma^{(0)}$  задается с помощью выражения:

$$\gamma_3^{(0)}(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} m_{11}\omega^2 - k_1 & m_{13}\omega^2 \\ m_{31}\omega^2 & m_{33}\omega^2 - k_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{21}\omega^2 & m_{23}\omega^2 \\ m_{31}\omega^2 & m_{33}\omega^2 - k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{11}\omega^2 - k_1 & m_{13}\omega^2 \\ m_{21}\omega^2 & m_{23}\omega^2 \end{vmatrix}}. \quad (26)$$

В свою очередь, кривая  $\Gamma^{(\infty)}$  состоит из двух ветвей:

$$\gamma_3^{(\infty)}(\omega) = \frac{(M_0 l_1^2 + 2J_2 - M_0 l_1 l_3)\omega^2 - 2k_2 l_1^2 - 4k_2 l_1 l_3 - 2k_2 l_3^2}{(M_0 l_1 l_3 - J_2)\omega^2}, \quad (27)$$

$$\omega = l_2 \sqrt{\frac{2k_2}{J_1}} \quad (28)$$

Совокупность аналитических зависимостей (24)-(28) позволяет построить разбиение значений коэффициента связности на семейство множеств, в каждом из которых состояния вибрационного поля могут быть охарактеризованы динамическим инвариантом с фиксированным количеством режимов обнуления, резонансов и форм динамических взаимодействий.

В общем случае задача определения полной совокупности динамических инвариантов связана с построением вычислительных алгоритмов поиска возможных взаимный расположений корней многочленов, образующих числители и знаменатели амплитудно-частотных характеристик передаточных функций межпарциальных связей. Для конкретной механической колебательной системы с учетом симметрии совокупность динамических инвариантов может быть построена на основе частотных кривых.

## 5. Оценка совокупности состояний вибрационного поля. Вычислительный эксперимент

Рассматривается система (рис.1) с характеристиками:

$$k_1 = 2.0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, \quad k_2 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, \quad k_3 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, \quad (29)$$

$$l_1 = 0.5 \text{ м}, \quad l_2 = 0.1 \text{ м}, \quad l_3 = 0.3 \text{ м}, \quad (30)$$

$$M = 100 \text{ кг}, \quad J_1 = 50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_2 = 80 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (31)$$

Предполагается, что коэффициент связности  $\gamma_2 = 1$ , а коэффициент связности  $\gamma_3$  принимает произвольные значения. Совокупность состояний вибрационного поля в зависимости от коэффициента связности  $\gamma_3$  определяется параметрическим семейством амплитудно-частотных характеристик:

$$A_{21}(\omega) = \frac{(1.0925 \cdot \omega^4 - 1547.5 \cdot \omega^2)\gamma_3 + 128000 + 1.945 \cdot \omega^4 - 1774 \cdot \omega^2}{(0.8125 \cdot \omega^4 - 32.5 \cdot \omega^2)\gamma_3 + 64000 + 2.125 \cdot \omega^4 - 1685 \cdot \omega^2}. \quad (32)$$

Параметрическое семейство (30) может быть разбито на непересекающиеся классы, обладающие одинаковым количеством существенных особенностей в виде числа режимов обнуления, резонансов и знакоопределенных форм вибрационного поля. Разбиение реализуется с помощью частотных кривых, формы и относительные положения которых определяют граничные точки параметрических классов амплитудно-частотных характеристик с постоянным количеством существенных особенностей. Частотная кривая обнуления имеет вид:

$$\gamma_3^{(0)}(\omega) = \frac{-7780\omega^4 + 7.096 \cdot 10^6\omega^2 - 5.12 \cdot 10^8}{\omega^2(4370 \cdot \omega^2 - 6.19 \cdot 10^6)}. \quad (33)$$

Частотная кривая резонанса состоит из двух ветвей:

$$\gamma_3^{(\infty)}(\omega) \approx \frac{0.015 \cdot (170 \cdot \omega^2 - 128000)}{\omega^2(4370 \cdot \omega^2 - 6.19 \cdot 10^6)}, \quad (34)$$

$$\omega \approx 6.32 \text{ рад./с.} \quad (35)$$

Особенности графика частотной кривой обнуления (рис.3а, кривая 1) определяют граничные значения коэффициента связности в виде предельного значения  $\gamma^{(3)} \approx -1.78$  и точки локального минимума  $\gamma^{(4)} \approx -0.63$ .

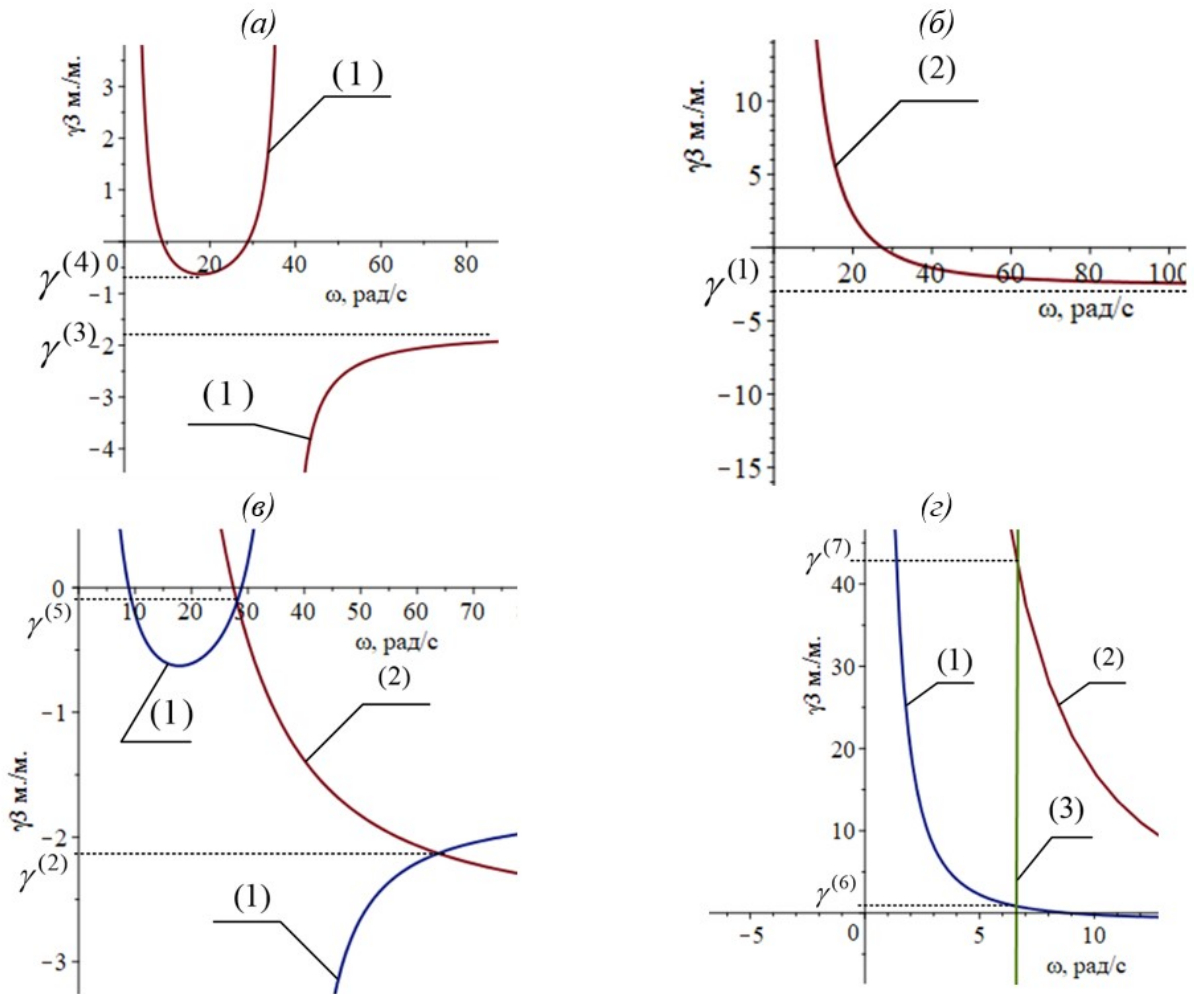


Рис. 3. Частотные кривые. (а) – частотная кривая обнуления 1 определяет граничные коэффициенты  $\gamma^{(3)}$  и  $\gamma^{(4)}$ , (б) – частотная кривая резонанса 2 определяет  $\gamma^{(1)}$ ; (в) – пересечение 1 и 2 определяет  $\gamma^{(2)}$  и  $\gamma^{(5)}$ ; (г) – пересечение 1 и 2 с прямой 3, для которой  $\omega \approx 6.32$  рад/с, определяет  $\gamma^{(6)}$  и  $\gamma^{(7)}$

График частотной кривой резонанса (рис. 3б, кривая 2) на основе предельной величины задает граничное значение коэффициента связности  $\gamma^{(1)} \approx -2.63$ . Пересечение кривых обнуления 1 и резонанса 2 определяет два граничных значения  $\gamma^{(2)} \approx -2.13$  и  $\gamma^{(5)} \approx -0.12$  (рис.3в). Пересечения ветви 3 частотной кривой обнуления с кривыми 1 и 2 определяет значения  $\gamma^{(6)} \approx 1$  и  $\gamma^{(7)} \approx 46.62$  (рис.3г).

Совокупность граничных коэффициентов связности  $\gamma^{(i)}$ ,  $i = 1 \dots 7$  разбивает множество параметров  $(-\infty, +\infty)$  на непересекающиеся подмножества:

$$(-\infty, \gamma^{(1)}), \{\gamma^{(1)}\}, (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}), \{\gamma^{(2)}\}, \dots, (\gamma^{(i)}, \gamma^{(i+1)}), \{\gamma^{(i+1)}\}, \dots \dots (\gamma^{(6)}, \gamma^{(7)}), \{\gamma^{(7)}\}, (\gamma^{(7)}, +\infty). \tag{36}$$

На множествах (36) амплитудно-частотные характеристики сохраняют свои существенные особенности в виде количества резонансов, режимов обнуления амплитуд колебаний и знакоопределенных форм динамических взаимодействий (рис.4).

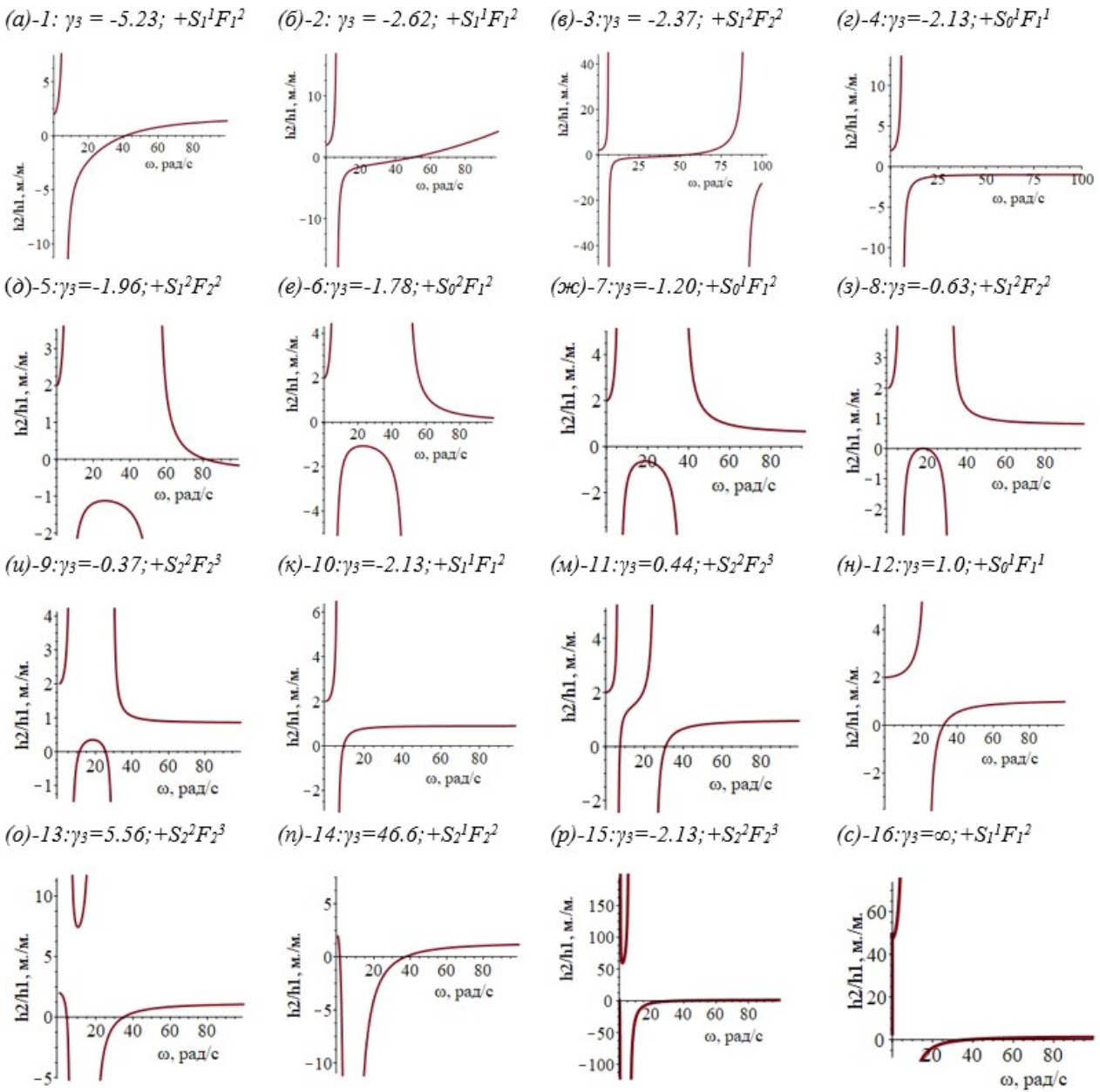


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики в зависимости от коэффициента связности  $\gamma_3$

Существенные особенности графиков амплитудно-частотных характеристик (рис.4) могут быть представлены с помощью динамических инвариантов [22] с характеристиками  $+S_k^l F_m^n$ , где  $l$  – количество резонансов,  $k$  – количество режимов обнуления колебаний,  $n$  – количество положительных и  $m$  – отрицательных форм вибрационного поля, «+» – означает, что значение амплитудно-частотной характеристики для нулевой частоты положительно, «-» – отрицательно (таблица 1). Каждому множеству разбиения (36) может быть сопоставлена определенная амплитудно-частотная характеристика, обладающая на данном множестве фиксированным набором существенных динамических особенностей, отображающих представления о динамических инвариантах (Таблица 1)

Таблица 1  
Динамические инварианты

	а	б	в	г	д	е	ж	з
I	1	2	3	4	5	6	7	8
II	$(-\infty, \gamma^{(1)})$	$\{\gamma^{(1)}\}$	$(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})$	$\{\gamma^{(2)}\}$	$(\gamma^{(2)}, \gamma^{(3)})$	$\{\gamma^{(3)}\}$	$(\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)})$	$\{\gamma^{(4)}\}$
III	$+S_1^1 F_1^2$	$+S_1^1 F_2^2$	$+S_1^2 F_2^2$	$+S_0^1 F_1^1$	$+S_1^2 F_2^2$	$+S_0^2 F_1^2$	$+S_0^1 F_1^2$	$+S_1^2 F_2^2$
IV	$+J_5$	$+J_5$	$+J_7$	$+J_3$	$+J_7$	$+J_5$	$+J_4$	$+J_7$
V	9	10	11	12	13	14	15	16
VI	$(\gamma^{(4)}, \gamma^{(5)})$	$\{\gamma^{(5)}\}$	$(\gamma^{(5)}, \gamma^{(6)})$	$\{\gamma^{(6)}\}$	$(\gamma^{(6)}, \gamma^{(7)})$	$\{\gamma^{(7)}\}$	$(\gamma^{(7)}, \infty)$	$\{\gamma \rightarrow \infty\}$
VII	$+S_2^2 F_2^3$	$+S_1^1 F_1^2$	$+S_2^2 F_2^3$	$+S_0^1 F_1^1$	$+S_2^2 F_2^3$	$+S_2^1 F_2^2$	$+S_2^2 F_2^3$	$+S_1^1 F_1^2$
VIII	$+J_9$	$+J_5$	$+J_9$	$+J_3$	$+J_9$	$+J_7$	$+J_9$	$+J_5$

Анализ совокупности динамических инвариантов показывает, что для семейства механических колебательных систем варьирование коэффициента связности силовых возмущений приводит к изменениям существенных динамических особенностей, выражающихся в количестве критических состояний и форм вибрационного поля. В частности, для коэффициента  $\gamma_3$  из интервала  $(-\infty, -2.63)$  реализуется один резонанс, один режим обнуления амплитуды колебания, две положительные и одна отрицательная форма вибрационного поля, что может быть представлено динамическим инвариантом  $+S_1^1 F_1^2$  с общим числом динамическим особенностей – 5 (рис.4а). Дальнейшее возрастание коэффициента связности приводит к изменению динамических особенностей механических колебательных систем таким образом, что для значительно больших коэффициентов связности совокупность динамических состояний характеризуется динамическим инвариантом  $+S_2^2 F_2^3$ , отображающим два резонанса, два режима обнуления, три положительных и две отрицательных формы динамических взаимодействий с общим числом особенностей – 9. Можно полагать, что возрастание коэффициента связности  $\gamma_3$  «добавляет» системе 4 динамических особенности: резонанс, режим обнуления, одну положительную и одну отрицательную форму вибрационного поля (рис.5).

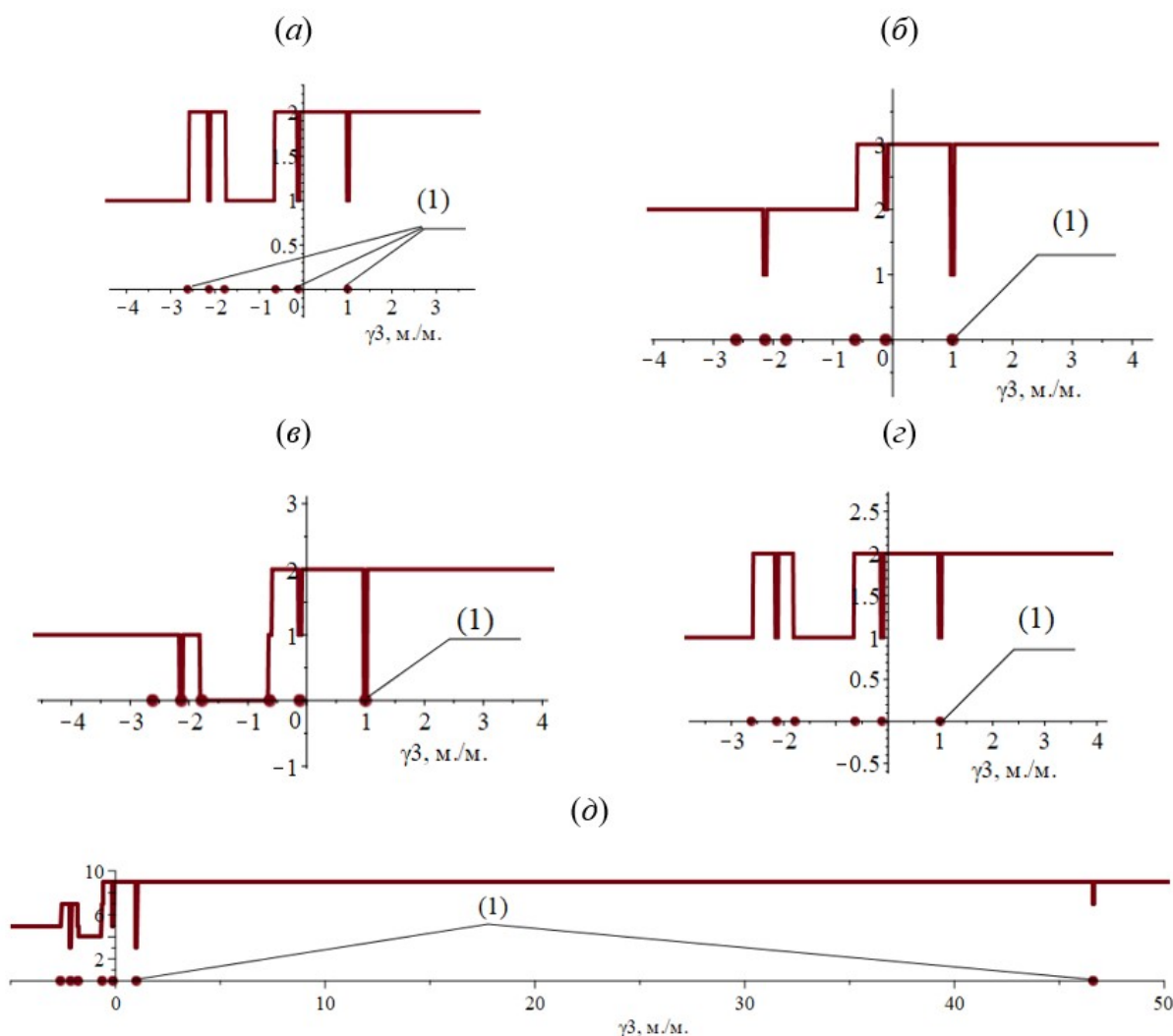


Рис. 5. Распределение характеристик динамических инвариантов в зависимости от коэффициента связности: (а) – количество резонансов, (б) – количество положительных форм, (в) – количество режимов обнуления, (г) – количество отрицательных форм, (д) – интегральная характеристика, (1) – граничные точки

Интегральная характеристика совокупности динамических состояний (рис.5д), рассматриваемая как целочисленная кусочно-постоянная функция с устранимыми и не устранимыми точками разрыва первого рода, отображает общее количество динамических особенностей вибрационного поля в зависимости от изменения характера связности внешних силовых возмущений.

При подготовке графических и аналитических материалов использовался математический пакет символьной арифметики [23].

## Заключение

В рамках методологии структурного математического моделирования разработан подход к оценке разнообразия состояний вибрационных полей технических объектов на основе представлений о динамических инвариантах отношений амплитуд колебаний точек рабочего органа.

Для расчетных схем в виде механических колебательных систем с тремя степенями

свободы получены явные аналитические выражения и структура коэффициентов амплитудно-частотных характеристик с учетом зависимости от связности внешних возмущений.

Для частного случая системы со свойствами симметрии на основе амплитудно-частотной характеристики получен явный вид частотных кривых обнуления и резонанса, особенности взаимного расположения которых позволяют построить разбиение семейства амплитудно-частотных характеристик на непересекающиеся классы, передающих обобщенные представления о вибрационном поле в виде количества резонансов, режимов обнуления и знакоположительных форм. Проведен численный эксперимент построения совокупности динамических инвариантов.

Показано, что ключевыми факторами изменения динамических особенностей вибрационного поля является взаимное расположение полюсов и нулей передаточной функции по мере изменения коэффициента связности внешних возмущений. В частности, установлено, что возрастание коэффициента связности приводит к увеличению динамического разнообразия, проявляющееся в добавлении резонанса, режима обнуления и двух знакоопределенных форм взаимодействий. Установлено, что сближение частоты обнуления с резонансной частотой системы приводит к взаимному устранению эффекта обнуления и эффекта резонанса.

Развитие методологии построения распределений динамических инвариантов вибрационного поля в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений обладает потенциалом разработки новых методов и средств управления характеристиками вибрационного поля рабочих органов технологических машин.

### Список литературы

1. Москвичев В.В., Махутов Н.А., Шокин Ю.И. Прикладные задачи конструкционной прочности и механики разрушения технических систем. Новосибирск: Наука, 2021. 795 с.
2. Ганиев Р.Ф. Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2013. 592 с.
3. Цыгичко В.Н. Оценка рисков нарушения безопасности критически важных объектов и критических инфраструктур. Проблемы анализа риска. 2016;13(5):6-10.
4. Махутов Н.А., Гаденин М.М., Резников Д.О. Критерии и определяющие уравнения для оценки прочности, ресурса, живучести и безопасности несущих элементов подвижного состава железнодорожного транспорта // В сборнике: Научные основы и технологии повышения ресурса и живучести подвижного состава железнодорожного транспорта. Сборник трудов международной научной конференции. – 2021. – С. 94 – 107.
5. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов: моногр. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2006. 176 с.
6. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения. Воронеж: Научная книга, 2011. 568 с.
7. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 394 с.
8. Елисеев А.В., Сельвинский В.В., Елисеев С.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неударяющих связей. Новосибирск: Наука, 2015. 332с.
9. Harris C. M., Crede C.E. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw — Hill Book Co, 2002. 1457 p.

10. Clarence W. de Silva. *Vibration. Fundamentals and Practice*. Boca Raton: CRC Press, 2006. 1064 p.
11. Вибрации в технике: справочник в 6-ти томах / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение. 1981. Т.4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э.Э Лавенделла. 1981. – 504 с.
12. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. Минск: ДизайнПРО, 2004. 640 с.
13. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
14. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
15. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Изд.-во ИГУ, 2008. 523 с.
16. Елисеев А.В. некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины / Елисеев А.В., Выонг К.Ч. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 1 (49). С. 33-41.
17. Елисеев А.В. некоторые подходы к обоснованию схемы инерционного возбуждения в технологических вибрационных машинах / Елисеев А.В., Мамаев Л.А., Ситов И.С. // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 4 (28). С. 15-24. 17.
18. Выонг К.Ч. Механизмы в структуре механической колебательной системы: возможности формирования динамических состояний / Выонг К.Ч., Ковригина И.В., Елисеев С.В. // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 3 (39). С. 13-18.
19. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке структурных особенностей механических колебательных систем // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – № 15. – С. 18–30.
20. Лурье, А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М.: Наука, 1959. 368 с.
21. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Технология структурного математического моделирования технических объектов в условиях вибрационного нагружения: формы взаимодействий и динамические инварианты // iPolytech Journal. – 2022. – Т. 26. – № 3. – С. 368–385.
22. Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К. системный подход к оценке полной совокупности динамических состояний технических объектов в условиях связанных вибрационных нагружений // Системы. Методы. Технологии. – 2023. – № 1 (57). – С. 7–20.
23. Maple. URL: <https://www.maplesoft.com> (дата обращения: 14.02.2023).

## References

1. Moskvichev V.V., Makhutov N.A., Shokin Yu.I. Applied problems of structural strength and mechanics of destruction of technical systems. Novosibirsk: Nauka, 2021. 795 p.
2. Ganiev R.F. Nonlinear resonances and catastrophes. Reliability, safety and noiselessness. Moscow, Izhevsk: Regular and Chaotic dynamics, 2013. 592 p.
3. Tsygichko V.N. Assessment of security risks of critical facilities and critical infrastructures. Problems of risk analysis. 2016;13(5):6-10.
4. Makhutov N.A., Gadenin M.M., Reznikov D.O. Criteria and defining equations for assessing the strength, resource, survivability and safety of bearing elements of railway rolling



stock // In the collection: Scientific foundations and technologies for improving the resource and survivability of railway rolling stock. Proceedings of the International Scientific conference. – 2021. – pp. 94 – 107.

5. Panovko G.Ya. Dynamics of vibrational technological processes: monogr. M., Izhevsk: SIC "Regular and chaotic dynamics", Institute of Computer Research, 2006. 176 p.

6. Kopylov Yu.R. Dynamics of vibration shock hardening processes. Voronezh: Scientific Book, 2011. 568 p.

7. Blekhman I.I. Vibrational mechanics. M.: Nauka, 1994. 394 p

8. Eliseev A.V., Selvinsky V.V., Eliseev S.V. Dynamics of vibrational interactions of elements of technological systems taking into account unstoppable connections. Novosibirsk: Nauka, 2015. 332c.

9. Harris S. M., Srde C.E. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw — Hill Book Co, 2002. 1457 p.

10. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton: CRC Press, 2006. 1064 p.

11. Vibrations in technology: a handbook in 6 volumes / Ed. council: V.N. Chelomey (pred.). – M.: Mechanical Engineering. 1981. Vol.4. Vibration processes and machines / Edited by E.E. Lavendell. 1981. – 504 p.

12. Tarasik V.P. Mathematical modeling of technical systems. Minsk: DesignPro, 2004. 640 p.

13. Samarskiy A. A., Mikhailov A. P. Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples. M.: Fizmatlit, 2001. 320 p.

14. Kolovsky M.Z. Automatic control of vibration protection systems. M.: Nauka, 1976. 320 p.

15. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects. Irkutsk: Publishing House of the ISU, 2008. 523 p.

16. Eliseev A.V. some possibilities of controlling a one-dimensional vibration field of a technological machine / Eliseev A.V., Vyong K.Ch. // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016. No. 1 (49). pp. 33-41.

17. Eliseev A.V. some approaches to substantiating the scheme of inertial excitation in technological vibration machines / Eliseev A.V., Mamaev L.A., Sitov I.S. // Systems. Methods. Technologies. 2015. No. 4 (28). pp. 15-24. 17.

18. Vyong K.Ch. Mechanisms in the structure of a mechanical oscillatory system: possibilities for the formation of dynamic states / Vyong K.Ch., Kovrigina I.V., Eliseev S.V. // Systems. Methods. Technologies. 2018. No. 3 (39). pp. 13-18.

19. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Nikolaev A.V. The concept of dynamic invariants in the assessment of structural features of mechanical oscillatory systems // Transport, mining and construction engineering: science and production. – 2022. – No. 15. – pp. 18-30.

20. Lurie, A.I. Operational calculus and application in technical applications. M.: Nauka, 1959. 368 p.

21. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K. Technology of structural mathematical modeling of technical objects under conditions of vibration loading: forms of interactions and dynamic invariants // iPolytech Journal. – 2022. – Vol. 26. – No. 3. – pp. 368-385.

22. Eliseev A.V., Sitov I.S., Kuznetsov N.K. a systematic approach to the assessment of the full set of dynamic states of technical objects under conditions of coherent vibration loads // Systems. Methods. Technologies. – 2023. – № 1 (57). – Pp. 7-20.

23. Maple. URL: <https://www.maplesoft.com> (accessed: 02/14/2023).